دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق

عنوان

بررسی معناشناسی کریپکی برای منطق‌های فازی

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی‌پورمهر

استاد مشاور

دکتر جعفرصادق عیوضلو

پژوهشگر

پروین صفری

۱۳۹۵

به نام خداوند جان آفرین / حکیم سخن در زبان آفرین

سپاس مر خدای را که توفیق کسب دانش بر این رهپوی بی‌بازگشت، که همواره آسیمه سر در جستجوی آن است، عطا نمود تا «سخن در صلاح و تدبیر و خوی آورد».

دگر باره سپاس مر یزدان پاک را که فرصتی پیش آورد تا جواهر دانش را با مژگان و آب دیده از ذهن و ضمیر گنجینه‌داران ثمینش نگار نموده و پروانه‌وار گرد نور حکمتشان گردم که «تلقین اهل نظر یک اشارت است».

همراه تو تا ناب‌ترین آب رسیدن / همواره عطشناکی رویای من این است
من در تو به شوق و تو در آفاق به حیرت / نایاب‌ترین فصل تماشای من این است.

ناشناس (۱۳۹۵)

تقدیم به:

مادرم

و

پدرم

و

همسرم

ن والقلم وما یسطرون

هزاران سپاس از استاد راهنمای فرهیخته و فاضلم جناب آقای دکتر سعید صالحی‌پورمهر که بزرگوارانه و دلسوزانه چراغ راهم گشتند و بی‌شک بدون هدایت ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
همچنین از جناب آقای دکتر جعفرصادق عیوضلو که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند نیز کمال امتنان و تشکر را دارم.
از کلیه دبیران دوران تحصیلم و اساتید گرامی که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.
همچنین از اساتید محترم آقای دکتر باقری از دانشگاه تربیت مدرس و آقایان دکتر ایواز و دکتر کریمپور از دانشگاه تبریز که زحمت داوری پایان‌نامه اینجانب را متقبل شده‌اند، صمیمانه سپاسگزارم.
در پایان از پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم و بوسه بر دستانشان می‌زنم. به علاوه، از همسر مهربانم که در این راه مرا یاری نمود سپاسگزارم. بر خود لازم می‌دانم که از دوست مهربانم خانم زیبا اسعدی گلزار که با حمایت‌ها و کمک‌های خالصانه خود مرا یاری نمود، تشکر ویژه داشته باشم.

پروین صفری
۱۳۹۵

نام خانوادگی دانشجو: صفری نام: پروین
عنوان: بررسی معناشناسی کریپکی برای منطق‌های فازی
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی‌پورمهر استاد مشاور : دکتر جعفرصادق عیوضلو
مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی محض گرایش: منطق دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۵ تعداد صفحات: ۵۹
کلید واژه‌ها: منطق‌های فازی، منطق فازی پایه، منطق گودل، منطق دامت، قاب‌های کریپکی، مدل‌های کریپکی، صحت، تمامیت، معناشناسی.

چکیده

قاب‌های (مدل‌های) کریپکی معناشناسی مناسبی برای منطق‌های زیرکلاسیک فراهم می‌کنند، به عنوان مثال منطق شهودی (براور و هیتینگ) قاب‌های کریپکی تراگذری و بازتابی را اصل بندی می‌کند و منطق پایه (ویسر) قاب‌های کریپکی تراگذری را. در این رساله قاب‌های یا مدل‌های کریپکی را به عنوان یک معناشناسی برای منطق‌های فازی بررسی می‌کنیم. برای هر اصل موضوع منطق فازی پایه، شرط‌های لازم و کافی برای قاب‌های یا مدل‌های کریپکی که آن را برآورده می‌سازد، آورده شده است. معلوم گردید که تنها منطق‌های فازی که نسبت به یک کلاس از قاب‌ها یا مدل‌ها درست و کامل هستند توسیع‌های منطق گودل هستند. به علاوه این منطق نسبت به قاب‌های کریپکی بازتابی، تراگذری و خطی، قویاً کامل می‌باشد. بدین‌وسیله یک مشخصه‌سازی معنایی برای منطق گودل در بین منطق‌های (گزاره‌ای) فازی تعیین می‌شود. نتایج این رساله در مقاله‌ی زیر ارایه شده‌اند:

P. Safari & S. Salehi, Kripke Semantics for Fuzzy Logics, to appear in *Soft Computing*, doi:10.1007/s00500-016-2387-4.

فهرست مطالب

مقدمه

یک عقیده‌ی منطقی مشترک این است که هر گزاره یا راست است و یا دروغ و هر چند که امکاناتی مابین مطمئناً راست بودن و مطمئناً دروغ بودن و یا مابین آن چه راست شناخته شده و آن چه دروغ شناخته شده وجود دارد، ولی هیچ چیز بین «راستی» و «دروغی» وجود ندارد. این اصل یکی از صورت‌های قانون رد شق ثالث است. امروزه راستی و دروغی مشترکاً به عنوان دو ارزش درستی ممکن یک گزاره در نظر گرفته می‌شوند. در زمان‌های مختلف، منطق‌دانان نظریاتی دال بر وجود امکاناتی دیگر یعنی وجود بیش از دو ارزش درستی داده‌اند. در دوران قدیم و قرون وسطی این نظریات جزء لاینفک مسایلی خاص از فلسفه بود. در قرن حاضر گرچه، حداقل، در زمانی که منطق‌های چند ارزشی با لوکاسویچ [1] شروع می‌شد، همان مسایل فلسفی وجود داشت، ولی تاکید بر استخراج قوانینی کاملاً ریاضی بود که می‌بایست یک منطق چند ارزشی داشته باشد. در عین حال مشاهده شده است که دستگاه و روش‌های منتج از این نوع منطق‌ها آماده‌ی پذیرش کاربردهای فلسفی و تعبیراتی کاملاً متفاوت با آن چه در ابتدا باعث کار بر روی این‌ها شده بود، می‌باشد.

ارسطو در فصل نهم رساله خود «درباره تعبیر»[2] حالت درستی دیگری را در مورد موضوعات نامعلوم در آینده مورد بررسی قرار می‌دهد. موضوعاتی که رخداد آن‌ها هنوز برای ما مشخص نشده است. گرچه نتیجه بحث واضح نیست ولی تعداد زیادی از صاحب‌نظران بر این عقیده‌اند که ارسطو جملاتی از قبیل «فردا جنگ دریایی شروع خواهد شد» را که هنوز

[1] Łucasiewicz

[2] On interpretation

تصمیم گرفته نشده که فردا جنگ خواهد بود یا خیر، نه واقعاً راست می‌داند و نه واقعاً دروغ، هر چند که می‌تواند یکی از این دو باشد. چه این تعبیر از حرف‌های ارسطو صحیح باشد یا نباشد، اپیکوریان قانون دوگانگی را رد کردند و این یکی از اختلافات اصلی آن‌ها با رواقیون مانند کریسیپوس است که بر تعیین قطعی پافشاری می‌کردند. در مورد جملات بیان شده در زمان آینده، حداقل این است که قبل از اتفاق، یک حالت سومی یعنی نامعلومی مورد نظر بوده است.

واضح است که عقیده داشتن به ارزش‌های درستی به جز ارزش‌های قاطع «درستی» و «دروغی» محور اصلی موضوع منطق چند ارزشی است. برای چنین منطقی، باید تکلیف گزاره‌هایی که نه قطعاً راست و نه قطعاً دروغ هستند، بلکه دارای ارزش دیگری مانند «نامعلوم» یا «خنثی» هستند، روشن شود. از نظر تاریخی، مسأله نامعلومی در آینده، محرک اولیه‌ای برای جدی گرفتن این دورنمای گزاره‌ها با چنین حالت درستی غیر قطعی است.

در قرون وسطی این مسأله، یعنی حالت درستی نامعلومی در آینده، مورد بحث منطق‌دانان دنیای اسلام و هم در اروپای لاتین بود. یکی از مکاتب فکری این چنین گزاره‌هایی را نامشخص، یعنی نه راست و نه دروغ طبقه بندی کرد و بعد از آن مورخان سعی کردند که مواد اولیه منطق سه ارزشی را در تفکر اندیشمندانی مانند دان اسکات[۳] و مخصوصاً ویلیام از اوکهام[۴] که گزاره‌های خنثی را مورد مطالعه قرار داد، پیدا کنند. از بنیانگذاران اصلی منطق چند ارزشی، مک کل[۵] اسکاتلندی (۱۹۰۹ – ۱۸۳۷)، پیرس[۶] آمریکایی (۱۹۱۴ – ۱۸۳۹) و واسیلف[۷] روسی (۱۹۴۰ – ۱۸۸۰) بوده‌اند.

مک کل دستگاهی از منطق گزاره‌ها طراحی نمود که در آن به گزاره‌ها ارزش‌های مختلف درستی نسبت داده می‌شد. این ارزش‌ها به جز ارزش‌های درستی سنتی، ارزش‌های عرضی

[۳] D. Scotus

[۴] William of Ockham

[۵] H. M. Coll

[۶] Ch. S. Peirce

[۷] N. A. Vasilev

«اطمینان» (لزوم)، «عدم امکان» و «نامعلومی» را نیز در برداشت. او دستگاه منطقی خود را به عنوان یک «منطق سه بعدی» مشخص نمود و این در مقایسه با دستگاه‌های شرودر[۸] و ون[۹] بود که فقط دو بعد یعنی همان ارزش‌های درستی «راستی» و «دروغی» را در نظر داشتند. یک گزاره «مطمئن»[۱۰]، گزاره ای است که همیشه و لزوماً راست است، یک گزاره «غیر ممکن» گزاره‌ای است که بعضی اوقات راست و بعضی اوقات دروغ است. به عنوان مثال از این سه نوع ارزش کل به ترتیب می‌توان گزاره‌های زیر را عنوان نمود: ”۲ = ۲“، ”۲ = ۳“، ”۲ = x“. مک کل دستگاه خود را به یک جبر از منطق همراه با مشخصاتی از دستگاه‌های قبلی، منتها بر پایه سه ارزش به جای فقط دو ارزش توسعه داد. او منطق گزاره‌های نامعلوم را در حوزه حساب احتمالات به کار گرفت و از این رو می‌توان او را یکی از پیشگامان منطق‌دانان بعدی دانست که در تلاش برای تعبیر ارزش‌های درستی غیر کلاسیک منطق چند ارزشی در جهت احتمالات بودند. ایده مک کل را در رابطه با این ارزش‌ها و حساب احتمالات می‌توان یک ایده هوشمند به حساب آورد زیرا مثلاً اگر p متغیر باشد، ترکیب عطفی آن با خودش نیز یک متغیر است و در این حالت ترکیب یک متغیر با یک متغیر دیگر نیز متغیر خواهد بود. در صورتی که اگر p متغیر باشد آنگاه $\sim p$ هم متغیر است، ولی در این حالت ترکیب عطف متغیر p با متغیر $\sim p$ یک گزاره غیر ممکن است.

پیرس ایده‌های منطق چند ارزشی را از نقطه نظرات مختلفی مورد بررسی قرار داد. او به وجود ارزش درستی خنثی در منطق سنتی ارسطویی آن جا که از نامعلومی در آینده صحبت به میان می‌آید اعتقاد داشت. به علاوه او در مقاله‌ای با عنوان منطق لحظه‌ای یا خرده بین[۱۱] که فقط بعد از مرگش منتشر شد به یک ریاضیات سه گانه[۱۲] معتقد بود که تعبیرش از آن ریاضیاتی بر پایه یک منطق سه ارزشی یا سه گانه بوده است. تولد واقعی منطق چند ارزشی

[۸] E. Scheroder

[۹] J. Venn

[۱۰] Certain

[۱۱] Minute Logics

[۱۲] Trichotomic

باید زمانی باشد که لوکاسویچ و پست[۱۳] مقالات اصلی‌شان را در سال‌های اولیه ۱۹۲۰ منتشر کردند. لوکاسویچ دستگاهی کردن منطق چند ارزشی را مورد بحث قرار داد. به طور کلی دستگاه‌هایی را که آن‌ها در مقالاتشان ارایه نمودند انگیزه‌ای قوی برای توسعه منطق چند ارزشی شد.

لوکاسویچ اولین بار دستگاه منطق سه ارزشی خود را در یک سخنرانی عمومی در انجمن ریاضی و فلسفه و منطق لهستان در سال ۱۹۲۰ به نمایش گذارد. لازم به توضیح است که او قبلاً در سال ۱۹۱۰ کتابی تحت عنوان «اصل عدم تناقض در منطق ارسطو» منتشر کرده بود که در آن عقیده و محرک اصلی توسعه بعدی منطق سه ارزشی او یعنی موضوع نامعلومی در آینده مورد بحث قرار گرفته بود. لوکاسویچ در این مقاله به طور افراطی منطق دو ارزشی را رد می‌نماید و از دستگاه سه ارزشی کاملاً دفاع می‌نماید. بعد از لوکاسویچ اشخاصی مانند لنگفورد[۱۴] و لوئیز[۱۵] در زمینه فرمول بندی منطق چند ارزشی، بعضی ایده‌ها را مورد بازبینی و توجه خاص قرار دادند و مقالاتی تخصصی در مجله منطق نمادین[۱۶] در سال ۱۹۳۲ منتشر نمودند. یک نتیجه مهم و اصیل در این دوران مربوط به کار واسبرگ[۱۷] است که موفق شد منطق سه ارزشی لوکاسویچ را با مجموعه جالبی از اصول زیر همراه با قاعده وضع مقدم ($\{A, A \to B\} \Rightarrow B$) و قاعده جایگزینی، اصل موضوعی نماید:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $(\alpha \to \beta) \to [(\beta \to \theta) \to (\alpha \to \theta)]$
- $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
- $[(\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha] \to \alpha$

[۱۳] E. L. Post

[۱۴] Ch. H. Langford

[۱۵] C. I. Lewis

[۱۶] Jornal of Symbolic Logic

[۱۷] M. Wajsberg

باید توجه کرد که تفکر لوکاسویچ در مورد ماهیت منطق چند ارزشی در طی سال‌ها دستخوش تغییراتی بوده است. او در مقالات اولیه‌اش معتقد بود که فقط منطق سه ارزشی و بی‌نهایت ارزشی دارای فایده فلسفی و اهمیت کاربردی هستند و به علاوه عقیده داشت که منطق‌های n–ارزشی با $n > ۳$ هیچ فایده فلسفی بیشتری نسبت به منطق سه ارزشی ندارند. اما بعدها نظرش را تغییر داد و یک منطق چهار ارزشی ساخت که مهمترین منطق چند ارزشی متناهی است.

پست دسته‌ای از دستگاه‌های چند ارزشی را مستقل از کار لوکاسویچ کشف کرد و در مقاله‌ای در سال ۱۹۲۱ ارایه نمود که بعدها هرگز به آن ارجاع ننمود. در ادامه از سال ۱۹۳۲ تا ۱۹۶۵، منطق چند ارزشی چه از وجه نظری و چه از وجه کاربردی در جهت‌های مختلف توسعه پیدا کرد. محققان مختلفی کار و مطالعه بر روی منطق سه ارزشی لوکاسویچ و تعمیم آن را ادامه دادند؛ مانند تارسکی[۱۸]، اسلاپکی[۱۹]، روز[۲۰]، و بسیاری دیگر که به واسطه تلاش آن‌ها دستگاه‌های چند ارزشی زیادی به وجود آمد و جدا از دستگاه‌های اولیه لوکاسویچ مطالعه شدند. در این بین مقالات بوشوار[۲۱] و کلینی[۲۲] از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند زیرا به طریقی کاملاً متفاوت با لوکاسویچ، دستگاه‌های سه ارزشی را توسعه دادند و کاربردهای مهمی از آن در فراریاضیات را برشمردند. در این زمان یاسکوسکی[۲۳] دو روش جالب برای ساخت منطق‌های چند ارزشی جدید از منطق‌های قبلی ارایه کرد. یکی روش تعمیم دستگاهی و دیگری ضرب دو دستگاه. مطالعه و مروری که چرچ[۲۴] از جدول‌های درستی چند ارزشی برای منطق گزاره‌ای کلاسیک به عمل آورد، مورد علاقه زیاد واقع شد.

انواع خاصی از رابط‌های منطقی معین برای برقراری دستگاه‌های منطقی چند ارزشی، جدا

[۱۸] A. Tarski

[۱۹] J. Slupcki

[۲۰] A. Rose

[۲۱] D. A. Bochvar

[۲۲] S. C. Kleene

[۲۳] S. Jaskowski

[۲۴] A. Church

از همتای دو ارزشی آن‌ها مورد استفاده قرار گرفتند. نیاز به عملگرها و رابطها به خصوص در منطق‌های چند ارزشی مخصوصاً برای اطمینان از تامیت تابعی به حساب می‌آید و بعد از آن مقالاتی که مارتین[۲۵]، و فاکسلی[۲۶] به رشته تحریر درآوردند، قابل ذکرند.

تابع نقیض در غیاب اصل رد شق ثالث در منطق چند ارزشی باید خواص ویژه‌ای داشته باشد و این یک قرابت ذاتی بین منطق چند ارزشی و منطق شهودگرایی ایجاد می‌نماید. مطالعه دستگاه‌های چند ارزشی در ارتباط با حساب گزاره‌ای شهودگرایانه، محیطی پر ثمر از مسائل مهم را به وجود می‌آورد. در این حوزه کار سخت و پیشتاز ریاضیدان آلمانی براور[۲۷] و همچنین مقاله مهم ریاضیدان روسی کلموگوروف[۲۸] باید مورد توجه قرار گیرند.

ساخت نظریه سورها برای منطق چند ارزشی تقریباً یکی از آخرین کارها در این دوره است. همچنین اصل موضوعی کردن دستگاه‌های منطقی چند ارزشی یکی از موضوعات مهمی است که منطق‌دانان در این دوره به آن توجه زیادی نمودند. راسر[۲۹] و تورکت[۳۰] بررسی دقیقی از این موضوع را در کتاب خود ارایه داده‌اند.

در مورد تعبیرات معنایی منطق‌های چند ارزشی حاوی معنای جدول‌های درستی نیز سوالاتی مطرح بوده و مقالاتی نیز در این مورد انتشار یافته است که از آن جمله می‌توان مقالات پرایور[۳۱] را نام برد. به علاوه این تحقیقات، منطق‌دانانی چون برنشتاین[۳۲] و همپل[۳۳] تلاش نمودند تا مدل‌های جبری یا توپولوژیکی برای منطق‌های چند ارزشی ارایه دهند.

منطق‌های چند ارزشی از نظر کاربردی هم مورد توجه خاص قرارگرفته‌اند. به عنوان نمونه

[۲۵] N. M. Martin

[۲۶] E. Foxley

[۲۷] L. E. J. Brouwer

[۲۸] A. N. Kolmogorov

[۲۹] J. Rosser

[۳۰] A. Turquette

[۳۱] A. N. Prior

[۳۲] B. A. Bernstein

[۳۳] C. G. Hampel

در جهت کاربردهای فیزیکی، تعدادی منطق سه ارزشی را در مورد حالت‌های **عدم قطعی مکانیک کوآنتم** به کار گرفتند که زاریسکی[۳۴] اولین مقاله را در این زمینه در سال ۱۹۳۱ نوشت. کاربرد منطق‌های چند ارزشی در تجزیه و تحلیل مدارهای الکترونیکی در نظریه راهه گزینی[۳۵] اهمیت زیادی دارد که پیشگام در این راه شانون[۳۶] با نوشتن مقاله‌ای در سال ۱۹۳۸ بوده است. از سال ۱۹۶۵ تا کنون کارهای منطق‌دانان بر روی منطق‌های چند ارزشی ادامه یافت و در سال‌های اولیه عمدتاً به سعی در تعمیم خواص منطق‌های $n-$ارزشی متناهی به بی‌نهایت ارزشی اختصاص داشت. منطق‌های چند ارزشی به سرعت رشد و توسعه پیدا کردند. مقالات زیادی در این مورد به رشته تحریر در آمد. در این رابطه کارهای مک کال، پرایور و تورکت و مخصوصاً رشر[۳۷] قابل ملاحظه‌اند. کارهای اساسی و موضوعاتی را که در این دوران از طرف منطق‌دانان به عنوان ادامه کارهای قبل از ۱۹۶۵ می‌توان به حساب آورد، دارای مشخصات زیرند:

۱- دستگاه‌های سه ارزشی

۲- دستگاه‌های چند ارزشی و بی‌نهایت ارزشی منطق گزاره‌ای

۳- رابط‌های خاص در منطق‌های چند ارزشی مثلاً حالات خاص تابع نقیض

۴- اصل موضوعی کردن منطق‌های چند ارزشی

۵- تعبیرات معنایی منطق‌های چند ارزشی

۶- استفاده از منطق‌های چند ارزشی در مطالعه منطق‌های عرضی و وابسته

۷- استفاده از منطق‌های چند ارزشی در مطالعه منطق شهودگرایی و نظریه برهان

[۳۴] O. Zariski

[۳۵] Switching

[۳۶] C. E. Shanon

[۳۷] N. Rescher

۸- منطق‌های چند ارزشی و پارادوکس‌های منطق

۹- نامعلومی در آینده و ارزش درستی خنثی

۱۰- مجادلات فلسفی

۱۱- کاربرد منطق چند ارزشی در زبانشناسی

۱۲- کاربرد منطق چند ارزشی در نظریه مجموعه‌ها

۱۳- مدل‌های جبری، الگوریتمی و توپولوژیکی و کاربرد آن‌ها در منطق چند ارزشی

۱۴- انواع احتمالاتی منطق‌های چند ارزشی

۱۵- کاربردهای منطق چندارزشی به عنوان نمونه در نظریه مدارها و نظریه راه‌گزینی

برای اطلاع از شرح کارهای انجام شده و مقالاتی که در این زمینه‌ها تا سال ۱۹۷۴ نوشته شده، بهترین مرجع، کتاب [۶] می‌باشد. شاید مهم‌ترین و جنجالی‌ترین حادثه در تاریخ منطق‌های چند ارزشی با انتشار مقاله لطفی عسکرزاده در سال ۱۹۶۵ با معرفی زیرمجموعه‌های فازی رخ داد. منطق بنا شده بر زیرمجموعه‌های فازی را **منطق فازی یا منطق زاده** می‌نامند. منطق فازی در واقع اصطلاحی است که برای دو نوع منطق غیر کلاسیک به کار برده می‌شود:

۱-**منطق چند ارزشی:** منطقی که ارزش‌های درستی آن معمولاً در بازه‌ی $[0,1]$ هستند.

۲- **منطق زبانی:** منطقی که ارزش‌های درستی آن به وسیله لغاتی در زبان طبیعی بیان می‌شوند، مانند ، **راست**، **کم و بیش راست**، **نسبتاً دروغ** و ... این لغات یا اصطلاحات توسط زیرمجموعه‌های فازی مدل‌سازی می‌شوند.

هر دو تعمیمی از منطق‌های دو ارزشی و چند ارزشی هستند. انگیزه اولیه و اصلی زاده در معرفی این نوع زیر مجموعه‌ها مدل‌سازی **مفاهیم نادقیق** و مبهم می‌باشد. در واقع او از کاربرد خیلی دقیق ریاضیات در شرح پدیده‌های نادقیق دنیای واقعی احساس رضایت نمی‌کرد. وی در مورد توجیه نظریاتش می‌گوید که ما یک سیستم منطقی چند ارزشی نیاز داریم که قادر باشد چیزی درباره جملاتی از قبیل «حسین قد بلند است» را بگوید، برای این

که بلندی قد خاصیتی است که برای شرح آن به بی‌نهایت ارزش نیاز داریم. آن‌چه که منطق فازی نوع دوم را از منطق چند ارزشی متمایز می‌کند، این است که در این منطق با **سورهای فازی** از قبیل **بیشترین**، **کمی**، **چندین** و ... سر و کار داریم، در صورتی که در منطق چند ارزشی فقط دو سور داریم «همه» و «بعضی». اختلاف کلیدی دیگر این است که در این نوع منطق چند ارزشی، درستی[۳۸] به صورت فازی شناخته می‌شود. به این طریق منطق فازی سیستمی را مهیا می‌کند که به اندازه کافی قابل انعطاف است و می‌تواند به عنوان چارچوبی در خدمت علم مبانی بیان و زبان طبیعی قرار گیرد. آن‌چه در این سیر تاریخی مورد نظر است، منطق فازی به عنوان نوعی از منطق‌های چند ارزشی می‌باشد که بیشتر از نقطه نظر معنایی و کاربردهای فراوانش مورد توجه قرار گرفت.

اصطلاح «منطق فازی» دو معنی متفاوت دارد: وسیع و محدود. فرق مفید و مهمی بین این دو وجود دارد. در حالت محدود، منطق فازی با FLn نمایش داده می‌شود و یک سیستم منطقی است که هدف آن به دست آوردن چارچوبی صوری برای استدلال تقریبی است. در این حالت، FLn تعمیمی از منطق چند ارزشی است. البته دستور کار کاملاً با منطق‌های چند ارزشی سنتی متفاوت است. علی الخصوص مفاهیم کلیدی در FLn، مانند مفاهیم متغییر زبانی، صورت متعارف، اگر ... آن‌گاه فازی، سور فازی و فازی زدایی، محمول فازی، کیفی کردن درستی، اصل توسیع، قاعده استنتاج ترکیبی و استدلال تقریبی و غیره، در دستگاه‌های سنتی مورد نظر قرار نمی‌گیرند. این دلیل موجهی است برای این که FLn دارای دامنه وسیع‌تری از کاربردها نسبت به دستگاه‌های سنتی است. منطق فازی به معنی وسیع آن که با FLw نشان داده می‌شود، تقریباً با نظریه مجموعه‌های فازی FST هم معنی است که نظریه رده‌ها با مرزهای نادقیق است. FST خیلی وسیع‌تر از FLn است و در واقع FLn را به عنوان شاخه‌ای از خودش در بر می‌گیرد. همانطور که قبلاً ذکر شد، در منطق‌های چند ارزشی و همین‌طور منطق فازی به معنی محدود آن، قسمت معناشناسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است که می‌توان از جبرها، مشبکه‌ها و به طور خاص در این رساله مدل‌های کریپکی نام برد. [۱۰]

[۳۸] Truth

فصل ۱

منطق شهودی و منطق‌های زیرشهودی

۱.۱ منطق شهودی

منطق شهودی، نتیجه دیدگاه‌های فلسفی براور[۱] در مورد مبانی و فلسفه ریاضیات است که به شهودگرایی معروف است. معرفی این منطق و اصول موضوعه‌ی آن توسط هیتینگ[۲] صورت گرفت. کتاب‌ها و مقالات زیادی درباره‌ی ماهیت منطق شهودی و معناشناسی و نحو آن وجود دارند، به عنوان نمونه مینتس در کتاب خود [۷] منطق شهودی را به عنوان بخشی از منطق کلاسیک معرفی کرده است که تعبیر موثر و محاسبه‌پذیری از برنامه‌ها و الگوریتم‌ها برای برهان‌ها دارد و تاکید این منطق بر نامعتبر بودن اصل طرد شق ثالث یعنی $p \vee \neg p$ می‌باشد؛ یعنی اصول این منطق همان اصول موضوعه منطق کلاسیک می‌باشد منهای اصل طرد شق ثالث و یا به طور معادل اصول موضوعه منطق کلاسیک منهای قانون نقیض مضاعف. این کتاب دیدگاه براور را در منطق شهودی در نظر گرفته است. یکی از چیزهایی که به طور اهم از این منطق حاصل می‌شود نیاز به یک شاهد[۳] است، یعنی برای ادعایی مثل

[۱] D. Brouwer

[۲] Heyting

[۳] Wittness

$\exists x A$ حتماً باید tای به عنوان شاهد بیابیم که در جایگزینی t به جای x در A درست باشد. به طور مشابه وقتی ادعا می‌کنیم $A_1 \vee A_2$ درست است باید یکی از اجزای آن حتماً درست باشد و شاهدی برای آن بیاوریم. در صورتی که در منطق کلاسیک روی این مطلب تاکیدی نیست، به همین دلیل در منطق شهودی $A \vee \neg A$ یک اصل نیست چون معلوم نیست که کدام شق از فرمول صحیح است.

در حساب گزاره‌ای منطق کلاسیک به راحتی به یک متغیر گزاره‌ای ارزش درستی 1 یا نادرستی 0 متناظر می‌کنیم، اما معناشناسی منطق شهودی با این رویکرد است که: یک جمله برای درست بودن، باید قابل اثبات باشد. درستی عبارت‌هایی که قبلاً مشخص شده‌اند همچنان به قوت خود باقی است (پایایی) و وقتی می‌گوییم فرمولی نادرست است یعنی هنوز درست نیست؛ از این‌رو یک معناشناسی مناسب برای منطق شهودی، معناشناسی کریپکی می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱ (مدل‌های کریپکی برای منطق شهودی). یک مدل کریپکی یک سه تایی $\mathcal{K} = \langle K, R, \vDash \rangle$ است که در آن $\langle K, R \rangle$ یک قاب کریپکی نام دارد که K جهان مدل و R رابطه دسترسی نام دارد، و $\vDash \subseteq K \times \mathsf{Atoms}$ رابطه‌ی ارضاء شدن (فرسینگ) می‌باشد. رابطه ارضاء شدن به همه‌ی فرمول‌ها تعمیم می‌یابد، یعنی $\vDash \subseteq K \times \mathsf{Formulas}$:

- هیچ گره ای $\bot$ را ارضاء نمی‌کند یعنی برای هر $k \in K$ داریم $k \nvDash \bot$.
- رابط عطف زمانی ارضاء می شود که هر مولف از آن ارضاء شود و برعکس یعنی $k \vDash (\varphi \wedge \psi) \iff k \vDash \varphi$ و $k \vDash \psi$.
- رابط فصل زمانی ارضاء می‌شود که لااقل یکی از مولفه‌ها ارضاء شوند $k \vDash (\varphi \vee \psi) \iff k \vDash \varphi$ یا $k \vDash \psi$.
- رابطه‌ی استلزام زمانی ارضاء می‌شود که برای هر گره قابل دسترسی از یک گره و خود آن گره، اگر مقدم درست باشد آنگاه تالی نیز درست باشد:
$k \vDash \varphi \to \psi$ اگر وتنها اگر برای هر $k' \in K$ اگر $k' \vDash \varphi$ و kRk' آنگاه $k' \vDash \psi$.
- $k \vDash \neg\varphi$ اگر و تنها اگر برای هر kRk' داشته باشیم $k' \nvDash \varphi$.

یادآوری ۲.۱.۱. در منطق شهودی شرط پایایی روی هر مدل برای فرمول‌ها برقرار است، یعنی اگر $k, k' \in K$ موجود باشند به طوری که kRk' و $k \vDash \varphi$ آنگاه خواهیم داشت $k' \vDash \varphi$.

می‌توان با قرار دادن شرایطی روی رابطه‌ی دسترسی در قاب‌های کریپکی، آن‌ها را برای معناشناسی بعضی منطق‌ها در نظر گرفت؛ منطق شهودی نسبت به مدل‌های بازتابی و تراگذری و متقارن صحیح و کامل است.

۲.۱ منطق‌های زیرشهودی

در این بخش به بررسی معرفی منطق‌های زیر شهودی می‌پردازیم. زبان منطق زیر شهودی همان زبان منطق شهودی است که شامل $\wedge$، $\vee$، $\to$ و ثابت $\perp$ است. به علاوه شامل یک مجموعه‌ی شمارا از متغیرهای گزاره‌ای می‌باشد. فرمول‌ها به طور طبیعی تعریف می‌شوند، یعنی مجموعه‌ی فرمول‌های زیر شهودی کوچکترین مجموعه مانند X است که شامل $\perp$ و همه‌ی متغیرهای گزاره‌ای است و اگر φ و ψ در X باشند آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$، $(\varphi \vee \psi)$ و $(\varphi \to \psi)$ نیز در X قرار دارند. به طور خلاصه فرمول $\perp \to \perp$ را با $\top$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی فرمول‌ها را با F نمایش می‌دهیم. یک منطق در این زبان یک زوج $S = \langle F, \vdash \rangle$ است که $\vdash$ یک رابطه است به نام رابطه‌ِی نتیجه‌گیری بین مجموعه‌ای از فرمول‌ها و فرمول‌هاست $\vdash \subseteq \mathcal{P}(F) \times F$ به طوری که:

(۱) اگر $\varphi \in \Gamma$ آنگاه $\Gamma \vdash \varphi$؛

(۲) اگر $\Gamma \vdash \varphi$ و برای هر $\psi \in \Gamma$، $\Delta \vdash \psi$ آنگاه $\Delta \vdash \varphi$؛

(۳) اگر $\Gamma \vdash \varphi$ آنگاه برای هر جایگزینی e، $e[\Gamma] \vdash e(\varphi)$ وقتی که یک جایگزینی، یک همریختی جبر بولی از F به توی خودش است. (این خاصیت، تغیرناپذیری جایگزینی[۴]) نامیده می‌شود.

از (۱) و (۲) خواهیم داشت:

(۴) اگر $\Gamma \vdash \varphi$ آنگاه برای هر فرمول ψ، $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$.

[۴] Subsituation invariance

منطق‌ها می‌توانند از خیلی راه‌ها با استفاده از هر یک از روش‌های نحوی یا معنایی تعریف شوند. یک منطق S متناهی شدنی[۵] است هرگاه $\Gamma \vdash \varphi$ نتیجه دهد که برای یک $\Gamma' \subset \Gamma$ متناهی نیز $\Gamma' \vdash \varphi$ را داریم. تمام منطق‌های معرفی شده در این بخش متناهی شدنی هستند. ما معمولاً یک منطق را با رابطه‌ی نتیجه‌ی آن تشخیص می‌دهیم. یک قاعده هیلبرت گونه[۶] زوج $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ خواهد بود که Γ یک مجموعه‌ی متناهی از فرمول‌ها است و φ یک فرمول است. یک قاعده هیلبرت گونه مانند $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ و یک جایگزینی e در نظر می‌گیریم؛ زوج $\langle e[\Gamma], e(\varphi) \rangle$ یک نمونه جایگزینی از قاعده $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ است. حساب هیلبرت گونه شامل یک مجموعه از قواعد است که تحت نمونه‌های جایگزینی بسته است. قواعدی به شکل $\langle \varnothing, \varphi \rangle$ اصول موضوعه نامیده می‌شوند؛ پس اصول موضوعه می‌توانند توسط فرمول‌ها مشخص شوند. وقتی می‌گوییم که یک قاعده $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ را به حساب هیلبرت گونه اضافه می‌کنیم یعنی همه‌ی نمونه‌های جایگزینی‌اش را اضافه می‌کنیم، این یعنی قاعده را به عنوان طرح[۷] اصل موضوعی در نظر می‌گیریم. یک حساب هیلبرت گونه H به طریق استاندارد یک منطق S_H تعریف می‌کند، یعنی $\Gamma \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر یک برهان از φ در H باشد که از فرضیاتی در Γ به دست آمده باشد. یک حساب هیلبرت گونه‌ی H یک حساب هیلبرت برای منطق S گفته می‌شود اگر $\vdash_H \equiv \vdash$. وقتی می‌گوییم که منطق S زوج $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ را به عنوان قاعده دارد یعنی $\Gamma \vdash \varphi$. چند قاعده (هیلبرت) $R_1, R_2, ..., R_n$ را در نظر می‌گیریم؛ کوچکترین توسیع S که شامل این قواعد نیز می‌باشد را با نماد $S + R_1 + R_2 + ... + R_n$ نشان می‌دهیم. با در نظر گرفتن حساب هیلبرت برای S توسیع $S + R_1 + R_2 + ... + R_n$ می‌تواند توسط حساب هیلبرت اصل‌بندی شود که قواعدش همان قواعد هیلبرت به علاوه‌ی $R_1, R_2, ..., R_n$ هستند.

وضع مقدم و بازتابی

در این قسمت منطق‌هایی را که در آن‌ها قاعده وضع مقدم برقرار است بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم رابطه‌ی بین وضع مقدم و قاب‌های بازتابی را مطالعه کنیم. [۲]

---

[۵] Finitary

[۶] Hilbert-style

[۷] Schemata

گزاره ۱.۲.۱. *فرض کنیم $\langle K, R\rangle$ یک قاب کریپکی باشد. رابطه R بازتابی است اگر و تنها اگر قاعده وضع مقدم در $\langle K, R\rangle$ برقرار باشد.*

برهان. فرض کنیم رابطه R بازتابی و $\vDash$ رابطه ارضاء شدن باشد به طوری که $k \vDash \varphi$ و $k \vDash \varphi \to \psi$ آنگاه چون از بازتابی داریم $k\,R\,k$ پس $k \vDash \varphi$. برای اثبات عکس حکم، فرض کنیم قاعده‌ی وضع مقدم در $\langle K, R\rangle$ برقرار باشد، $k \in K$ و رابطه‌ی ارضاء شدن $\vDash$ را به صورت $\{\langle k, p\rangle\} \cup \{\langle \ell, q\rangle \,|\, kR\ell\}$ در نظر می‌گیریم. چون برای هر $k' \in K$ داریم $k\,R\,k' \vDash p \Rightarrow k' \vDash q$، بنابراین $k \vDash p \to q$. از قاعده MP خواهیم داشت $k \vDash q$ و بنابراین $k\,R\,k$. $\square$

گزاره ۲.۲.۱. *گرچه فرمول $p \wedge (p \to q) \to q$ در هر قاب کریپکی بازتابی معتبر است اما قاب‌های کریپکی غیر بازتابی وجود دارند که این فرمول در آن‌ها معتبر است.*

برهان. در قاب غیر بازتابی $\langle \{a\}, \emptyset\rangle$ هر فرمول شرطی $(A \to B)$، و علی الخصوص برای اتم‌های p و q فرمول $p \wedge (p \to q) \to q$، بنا به انتفای مقدم معتبر است. $\square$

تراگذری

در این بخش توجه خود را به منطق‌هایی معطوف می‌کنیم که توسط قاب‌های تراگذری معین می‌شوند [۲]. قاعده و اصل موضوعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{(RT)} \qquad \varphi \to \psi \vdash \theta \to (\varphi \to \psi)$$

$$\text{(T)} \qquad (\varphi \to \psi) \to (\theta \to (\varphi \to \psi)).$$

گزاره ۳.۲.۱. *فرض کنیم $\langle K, R\rangle$ یک قاب کریپکی باشد. رابطه R تراگذری است اگر و تنها اگر قاعده‌ی (RT) معتبر باشد.*

برهان. فرض کنیم R تراگذری باشد آنگاه برای هر $k \in K$ قاعده‌ی (RT) در k معتبر است اگر و تنها اگر برای هر $k' \in K$ که $k\,R\,k'$ و $k' \vDash \varphi \to \psi$ داشته باشیم $k' \vDash \theta \to (\varphi \to \psi)$؛ و این معادل است با اینکه برای هر $k'' \in K$ که $k'Rk''$ از $k'' \vDash \theta$ بتوان نتیجه گرفت که

$k'' \vDash \varphi \to \psi$. و این حکم معادل است با اینکه برای هر $k''' \in K$ اگر $k''Rk'''$ و $k''' \vDash \varphi$ آنگاه $k''' \vDash \psi$. با توجه به تراگذری بودن R، داریم $k'Rk'''$ و از آنجا که در فرضیات داریم $k' \vDash \varphi \to \psi$ و $k''' \vDash \varphi$، حکم حاصل می‌شود یعنی $k''' \vDash \psi$. برای اثبات عکس حکم، فرض کنیم (RT) در $\langle K, R\rangle$ برقرار باشد و p و q اتم‌های دلخواهی باشند و برای $k, k', k'' \in K$ داشته باشیم $k\,R\,k'$ و $k'\,R\,k''$. برای آن‌که نشان دهیم R تراگذری است رابطه ارضاء شدن $\vDash$ را به صورت $\{\langle \ell, p\rangle \mid k'R\ell\} \cup \{\langle \ell, q\rangle \mid kR\ell\}$ در نظر می‌گیریم. آنگاه برای هر $\ell \in K$ داریم $k\,R\,\ell \vDash p \Rightarrow \ell \vDash q$. پس $k \vDash p \to q$، بنابراین از (RT) خواهیم داشت $k \vDash \top \to (p \to q)$. در نتیجه $k\,R\,\ell \Rightarrow \ell \vDash p \to q$ و چون $k\,R\,k'$، آنگاه $k' \vDash p \to q$. بنابراین برای هر $\ell \in K$ داریم $k'\,R\,\ell \vDash p \Rightarrow \ell \vDash q$ پس $k'\,R\,\ell \Rightarrow k\,R\,\ell$ و در نهایت چون $k'\,R\,k''$ در نتیجه $k\,R\,k''$؛ و این یعنی R تراگذری است. □

گزاره ۴.۲.۱. *اصل موضوعه (T) در هر قاب کریپکی تراگذری معتبر است اما قاب‌های کریپکی غیر تراگذری وجود دارند که این اصل در آن‌ها معتبر است.*

برهان. فرض کنیم در قاب $\langle K, R\rangle$ رابطه‌ی R تراگذری باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که برای $k \in K$، داریم $k \vDash$ T که این معادل است با این که نشان دهیم برای هر $k' \in K$ که kRk' و $k' \vDash \varphi \to \psi$ آنگاه $k' \vDash \theta \to (\varphi \to \psi)$؛ این حکم معادل با این است که نشان داده شود برای هر $k'' \in K$ که $k'Rk''$ و $k'' \vDash \theta$ بتوان نتیجه گرفت $k'' \vDash \varphi \to \psi$ و این یعنی این که نشان دهیم برای هر $k''' \in K$ که $k''Rk'''$ و $k''' \vDash \varphi$ آنگاه $k''' \vDash \psi$. از فرض تراگذری بودن R داریم $k'Rk'''$ و چون $k' \vDash \varphi \to \psi$ و $k''' \vDash \varphi$ آنگاه $k''' \vDash \psi$ و لذا حکم برقرار است. برای اثبات قسمت دوم کافی است قاب $\langle \{a, b, c\}, \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}\rangle$ را در نظر بگیریم که به وضوح تراگذری نیست. در گره a داریم $a \vDash (p \to q) \to [r \to (p \to q)]$ زیرا (برای تنها گره b که $a\,R\,b$) اگر $b \vDash p \to q$ آنگاه $b \vDash r \to (p \to q)$ و این نیز به این دلیل برقرار است که برای تنها گره c داریم $b\,R\,c$ و اگر $c \vDash r$ آنگاه $c \vDash p \to q$ (چون گره دیگری وجود ندارد که با c در رابطه باشد پس هر گزاره‌ی شرطی در c برقرار است.)

به همین ترتیب $b \vDash (p \to q) \to [r \to (p \to q)]$ و $c \vDash (p \to q) \to [r \to (p \to q)]$ نیز نتیجه می‌شوند. □

فصل ۲

منطق‌های فازی

در این فصل تعدادی از منطق‌های چند ارزشی مهم را که در ارتباط با منطق اساسی BL هستند معرفی خواهیم نمود. اصول موضوعه و خواص اصلی آنها را ارایه و بعضی قضایای مربوطه را ذکر می‌کنیم.

۱.۲ نرم‌های مثلثی پیوسته و توابع مانده‌ی آن‌ها

ابتدا، مقداری از مقدمات لازم برای تشکیل یک حساب گزاره‌ای چند ارزشی که در مرجع [۵] این رساله ذکر شده، ارایه می‌کنیم. منطقی که برای این بحث مد نظر است، منطق گزاره‌ها می‌باشد و بازه‌ی $[0,1]$ از اعداد حقیقی را به عنوان مجموعه‌ی ارزش‌های درستی در نظر می‌گیریم که در آن 1 به معنی درستی مطلق و 0 به عنوان دروغی مطلق است. رابطه طبیعی $\leq$ روی اعداد حقیقی نقش مهمی را ایفا می‌کند. بنابراین ارزش‌های درستی کاملاً مرتب بوده و $([0,1],\leq)$ یک مجموعه مرتب کامل است. در این حساب هر رابط منطقی دارای یک تابع درستی است که ارزش هر فرمول به طور منحصر به فردی با به کارگیری این توابع روی ارزش‌های درستی مولفه‌های آن به دست می‌آید. حال که توابع درستی رابط‌ها انتخاب شدند می‌توان پذیرفت که هر منطق چند ارزشی تعمیمی از منطق کلاسیک دو ارزشی

است. (به این معنی که توابع درستی به مقادیر 0 و 1 تحدید شوند). لذا برای شروع، توابع درستی مناسب برای رابطه‌های منطقی معرفی می‌کنیم. انتخاب، در این جا تابع درستی برای رابط **عطف** است و می‌توان دید که انتخاب مناسب تابع برای معناشناسی رابط عطف، تمام حساب گزاره‌ها را معین می‌کند.

درک شهودی ما از رابط عطف این است که اگر دو فرمول φ و ψ داشته باشیم، چنان چه درجه درستی $\varphi\&\psi$ ($\&$ رابط عطف است) زیاد باشد، این نشان می‌دهد که درجه درستی هر دو فرمول φ و ψ بدون هیچ برتری بین آن‌ها زیاد است. بنابراین طبیعی است که فرض کنیم تابع درستی عطف نسبت به هر دو مولفه غیر نزولی است. این شرایط در تابع t−نرم به خوبی وجود دارد که در زیر به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۲.۱.۱. یک t−نرم، تابعی دوتایی $*$ روی $[0,1]$ است به طوری که:

(i) $*$ جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است، یعنی برای هر $x,y,z\in[0,1]$،

$$x*y=y*x$$

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

(ii) $*$ نسبت به هر دو مولفه نانزولی است، یعنی

اگر $x_1\leq x_2$ آنگاه $x_1*y\leq x_2*y$

اگر $y_1\leq y_2$ آنگاه $x*y_1\leq x*y_2$

(iii) $1*x=x$ و $0*x=0$ برای هر $x\in[0,1]$.

$*$ یک نرم **پیوسته** است هرگاه یک t−نرم بوده و به عنوان تابعی از $[0,1]^2$ به $[0,1]$ پیوسته باشد.

توابع زیر مهم‌ترین مثال‌ها از t−نرم‌های پیوسته هستند:

(i) t−نرم **لوکاسویچ**: $x*y=\max(0,x+y-1)$

(ii) t− نرم **گودل**: $x*y=\min(x,y)$

(iii) t−نرم **حاصل ضرب**: $x*y=x\cdot y$

حال به بحث در مورد **استلزام** می‌پردازیم. در منطق دو ارزشی، استلزام $\psi \to \varphi$ درست است اگر و تنها اگر درستی φ کمتر یا مساوی ارزش درستی ψ باشد. این خاصیت را می‌توان چنین تعمیم داد که هرگاه ارزش درستی $\psi \to \varphi$ زیاد باشد، این نشان می‌دهد که ارزش درستی φ **خیلی زیادتر** از ارزش درستی ψ نیست. پس باید تابع درستی استلزام $x \Rightarrow y$ نسبت به x غیرصعودی و نسبت به y غیرنزولی باشد. به علاوه ما اعتبار و صحت قاعده‌ی وضع مقدم (MP) فازی را نیز باید در نظر بگیریم: از (کران پایین) درجه درستی φ یعنی x و (کران پایین) درجه درستی $(\varphi \to \psi)$ یعنی $x \Rightarrow y$ می‌توانیم کران پایینی برای درجه درستی ψ یعنی y محاسبه کنیم. تابعی که کران پایین y را محاسبه می‌کند باید نسبت به هر دو مولفه غیر نزولی باشد، هر چند مشکل است که در مورد جا به جایی یا شرکت‌پذیری آن صحبت کنیم، اما می‌توان آن را $t-$نرم $*$ در نظر گرفت. در نتیجه بحث فوق می‌گوید که

اگر $a \leq x$ و $b \leq x \Rightarrow y$ آنگاه $a * b \leq y$،

در حالت خاص که $x = a$ و $b = z$ داریم اگر $z \leq x \Rightarrow y$ آنگاه $x * z \leq y$.

از طرف دیگر $x \Rightarrow y$ را تا جایی که ممکن است بزرگ تعریف می‌کنیم که خواص حفظ شوند. بنابراین هر وقت که $x * y \leq y$، آن‌گاه z یک مقدار ممکن برای $x \Rightarrow y$ خواهد بود به این معنی که استنتاج $a * b \leq y$ از $a \leq x$ و $b \leq x \Rightarrow y$ معتبر باشد. از این‌رو شرط برعکس را نیز داریم یعنی:

اگر $x * z \leq y$، آنگاه $z \leq x \Rightarrow y$،

نتیجه این که $x * z \leq y$ اگر و تنها اگر $z \leq (x \Rightarrow y)$ و می‌توان گفت که $x \Rightarrow y$ بیشترین مقدار z است که $x * z \leq y$، یا $a \Rightarrow b = \sup \{z|\ a * z \leq b\}$.

لم ۲.۱.۲. [۵] *فرض کنید $*$ یک $t-$نرم پیوسته باشد. آنگاه یک عملگر دوتایی منحصر به فرد $x \Rightarrow y$ وجود دارد که در شرط زیر برای هر $x, y, z \in [0, 1]$ صدق می‌کند:*

$(x * z) \leq y$ *اگر و تنها اگر* $z \leq (x \Rightarrow y)$؛ *یعنی* $x \Rightarrow y = \max \{z : x * z \leq y\}$.

برهان. زیرمجموعه $A = \{z \in [0, 1]|\, x * z \leq y\}$ از $[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم. این مجموعه از اعدادحقیقی کران بالا دارد و بنا بر قضیه تمامیت اعدادحقیقی در آنالیز مقدماتی، دارای سوپریمم است. حال $x \Rightarrow y = \sup A$ را تعریف می‌کنیم. واضح است که $\Rightarrow$ یک تابع

دوتایی است. اگر برای یک z ثابت، تابع $f : [0,1] \to [0,1]$ را با ضابطه‌ی $f(x) = x * z$ تعریف کنیم، f پیوسته و غیرنزولی است و در نتیجه با sup جا به جا می‌شود یعنی:

$$x * (x \Rightarrow y) = x * \sup\{z \in [0,1] | x * z \leq y\} = \sup\{x * z | x * z \leq y\} \leq y$$

پس $\sup A = (x \Rightarrow y) \in A$ و داریم $x \Rightarrow y = \max\{z \in [0,1] | x * z \leq y\}$. □

منحصر به فرد بودن $\Rightarrow$ ناشی از منحصر به فرد بودن بزرگترین عنصر مجموعه‌ی A می‌باشد. توجه داریم که t–نرم $*$ کافی است فقط از چپ پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۲. عملگر $x \Rightarrow y$ در لم فوق **تابع مانده‌ی**[۱] t–نرم $*$ نامیده می‌شود.

لم ۴.۱.۲. *برای هر t–نرم پیوسته $*$ و تابع مانده‌ی آن $\Rightarrow$، و برای هر $x, y \in [0,1]$ داریم*

(i) $(x \Rightarrow y) = 1$ *اگر و تنها اگر* $x \leq y$

(ii) $(1 \Rightarrow x) = x$

۲.۲ منطق چند ارزشی پایه BL

در این قسمت به شرح منطق چند ارزشی می‌پردازیم که بر پایه یک t–نرم پیوسته ساخته می‌شود. این منطق توسط پیتر هایک در ۱۹۹۸ مطرح گردید. او این منطق را منطق فازی پایه[۲] نامید که در خیلی جاها نویسنده از آن به عنوان **منطق پایه** نام برده است.
فرض کنیم $*$ یک t–نرم پیوسته باشد، منطق پایه یک منطق گزاره‌ای است که مجموعه‌ی ارزش‌های درستی آن $[0,1]$ است به طوری که $*$ به عنوان تابع درستی رابط عطف (قوی) است که با علامت $\&$ نشان داده می‌شود، تابع مانده‌ی مربوط به $*$ یعنی $\Rightarrow$ تابع درستی رابط شرطی $\to$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۲. منطق گزاره‌ای بر مبنای $*$ مشخصات زیر را دارد:

[۱] Residuum

[۲] The Basic Fuzzy Logic

(۱) مجموعه متغیرهای گزاره‌ای عبارتست از $\mathsf{Atoms} = \{p_{۱}, p_{۲}, ...\}$،

(۲) رابط‌های منطقی $\&$ و $\rightarrow$ هستند،

(۳) $\perp$ ثابت تناقض است،

(۴) **فرمول‌ها** به طریق معمول تعریف می‌شوند: هر متغیر گزاره‌ای یک فرمول است و $\perp$ یک فرمول است و اگر φ و ψ فرمول باشند آنگاه $\varphi\&\psi$ و $\varphi \rightarrow \psi$ نیز فرمول هستند.

رابط‌های بیشتری در این منطق به طریق زیر می‌توان در نظر گرفت:

- $\varphi \wedge \psi$ را به جای $\varphi\&(\varphi \rightarrow \psi)$،
- $\varphi \vee \psi$ را به جای $\big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi\big) \wedge \big((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi\big)$،
- $\neg\varphi$ را به جای $\varphi \rightarrow \perp$.

تعریف ۲.۲.۲. یک **ارزش‌دهی** به متغیرهای گزاره‌ای نگاشتی است مانند e که به هر متغیر گزاره‌ای p، ارزش درستی آن $e(p)$ را در مجموعه $[0,1]$ نسبت می‌دهد. تابع ارزش‌دهی $e : p \rightarrow [0,1]$ را می‌توان به مجموعه فرمول‌ها تعمیم داد.

- $e(\perp) = 0$
- $e(\varphi \rightarrow \psi) = \big(e(\varphi) \Rightarrow e(\psi)\big)$
- $e(\varphi\&\psi) = \big(e(\varphi) * e(\psi)\big)$

تعریف ۳.۲.۲. فرمول φ را $1-$راستگو در منطق گزاره‌ای گوییم هرگاه $e(\varphi) = 1$ برای هر ارزش‌دهی e برقرار باشد.
با توجه به تعریف فوق $1-$راستگو فرمولی است که تحت هر ارزشدهی به طور مطلق درست باشد. در زیر فرمول‌هایی را انتخاب می‌کنیم که برای هر $t-$نرم پیوسته $*$، $1-$راستگو هستند. در واقع برخی از این فرمول‌ها اصول موضوعه‌ی این منطق می‌باشند.

اصول موضوع منطق پایه عبارتست از [۵]:

$$(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \theta) \to (\varphi \to \theta)] \quad (A_۱)$$

$$(\varphi \& \psi) \to \varphi \quad (A_۲)$$

$$(\varphi \& \psi) \to (\psi \& \varphi) \quad (A_۳)$$

$$(\varphi \& [\varphi \to \psi]) \to (\psi \& [\psi \to \varphi]) \quad (A_۴)$$

$$[\varphi \to (\psi \to \theta)] \to [(\varphi \& \psi) \to \theta] \quad (A_۵ a)$$

$$[(\varphi \& \psi) \to \theta] \to [\varphi \to (\psi \to \theta)] \quad (A_۵ b)$$

$$[(\varphi \to \psi) \to \theta] \to [([\psi \to \varphi] \to \theta) \to \theta] \quad (A_۶)$$

$$\perp \to \varphi \quad (A_۷)$$

و تنها قانون این منطق، وضع مقدم می‌باشد

(MP)

$$\frac{A, \quad A \to B}{B}.$$

ذکر نکاتی درباره اصول موضوع جالب است. اصل موضوعه $(A_۱)$ خاصیت تراگذری استلزام است. اصل موضوعه $(A_۲)$ بیان می‌دارد که عملگر عطف $\&$ اولین مولفه را نتیجه می‌دهد و $(A_۳)$ خاصیت جا به جایی عطف $\&$ را نشان می‌دهد. اصل $(A_۴)$ خاصیت جا به جایی عطف $\wedge$ را می‌رساند. اصول موضوعه $(A_۵)$ خاصیت مانده را به نمایش می‌گذارند. اصل $(A_۶)$ اصل خطی است به این معنی که اگر فرمول θ از $\psi \to \varphi$ به دست می‌آید، آنگاه اگر θ از $\varphi \to \psi$ هم به دست آید، آنگاه θ نتیجه می‌شود. در نهایت اصل موضوعه $(A_۷)$ می‌گوید که هر فرمولی از $\perp$ نتیجه می‌شود.

۳.۲ منطق گزاره‌ای لوکاسویچ

منطق گزاره‌ای لوکاسویچ، منطق به دست آمده از t−نرم لوکاسویچ تابع استلزام مربوطه است. اصول موضوعه این منطق از اضافه کردن یک فرمول توتولوژی به اصول موضوعه BL به دست می‌آید که اصل موضوع **نفی مضاعف** نام دارد و با علامت $(\neg\neg)$ نمایش داده می‌شود.

$$\neg\neg\varphi \to \varphi \qquad (\neg\neg)$$

نظریه $BL + (\neg\neg)$ منطق گزاره‌ای لوکاسویچ نام دارد و با علامت Ł نمایش داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که این منطق، حساب گزاره‌ای است که از t−نرم لوکاسویچ تولید می‌شود به این معنی که تابع درستی برای رابط عطف چنین باشد:

$$x * y = \max(0, x + y - 1)$$

و از آن، تابع درستی رابط شرطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x \Rightarrow y = \min(1, 1 - x + y)$$

به آسانی دیده می‌شود که استلزام لوکاسویچ فوق خاصیت زیر را دارد:

$$\big((x \Rightarrow y) \Rightarrow y\big) = \max(x, y)$$

تعریف ۱.۳.۲. فرمول‌های زیر اصول موضوعه‌ی لوکاسویچ نامیده می‌شوند:

(۱) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(۲) $(\varphi \to \psi) \to \big((\psi \to \theta) \to (\varphi \to \theta)\big)$

(۳) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

(۴) $\big((\varphi \to \psi) \to \psi\big) \to \big((\psi \to \varphi) \to \varphi\big)$

۴.۲ منطق گویای پاولکا RPL

آنچه که تا کنون انجام شد براساس علاقه به $1-$راستگوها یعنی فرمول‌هایی که ارزش 1 دارند می‌باشد و این وقتی است که ارزش اصول موضوعه، 1 درنظر گرفته می‌شود، یعنی بر اساس درستی مطلق بوده است. اما می‌توان این سوال را مطرح کرد که آیا می‌توان نتایج به طور جزیی درست را از فرض‌های به طور جزیی درست اثبات کرد؟ به نظر می‌رسد که این با مفهوم شهودی منطق فازی مناسبت دارد. در این قسمت می‌توان نشان داد که این موضوع در منطق لوکاسویچ امکان دارد. در واقع مشاهده می‌شود که برای هر ارزش‌دهی e، $e(\varphi) = r$ آنگاه برای هر فرمول ψ، $e(\psi) \leq r$ اگر و تنها اگر $e(\varphi \to \psi) = r$. بنابراین می‌توان به ازای هر عدد گویای r در $[0,1]$ یک ثابت درستی $\bar{r}$ یعنی فرمول خاصی که ارزش درستی آن تحت هر ارزشدهی، عدد r است نسبت داد و البته ما قبلاً $\bar{0}$ و $\bar{1}$ را داشته‌ایم ولی چرا مثلاً $\overline{۰/۲}$ را نداشته باشیم؟ می‌توانیم برای هر عدد حقیقی r، فرمول $\bar{r}$ را معرفی کنیم ولی این، زبان منطق ما را ناشمارا می‌کند که مشکلات خاص خودش را دارد.

تعریف ۱.۴.۲. زبان منطق گویای پاولکا، RPL از زبان منطق Ł با اضافه کردن $\bar{r}$ برای هر عدد گویای r به دست می‌آید. هر ثابت درستی یک فرمول است و فرمول‌ها از متغیرهای گزاره‌ای و ثابت‌های درستی با به کارگیری مکرر رابطهای $\to$ و $\neg$ (و البته همین طور رابطهای $\&$، $\wedge$، $\vee$ و $\equiv$) ساخته می‌شوند.

هر تابع ارزش‌دهی از متغیرهای گزاره‌ای، به تمام فرمول‌ها قابل تعمیم است، مشروط بر اینکه $e(\bar{r}) = r$ برای هر ارزشدهی e و هر عدد گویای r در $[0,1]$. **اصول موضوعه** RPL اصول موضوعه (۱) تا (۴) منطق لوکاسویچ به علاوه اصول موضوعه‌ی زیر مربوط به ثابت‌های درستی هستند:

$$(\bar{r} \to \bar{s}) \equiv (\overline{r \Rightarrow s})$$

$$(\neg\bar{r}) \equiv (\overline{1-r})$$

قاعده استنتاج همچنان وضع مقدم می‌باشد. یک **نظریه** مجموعه‌ای از فرمول‌ها به عنوان اصول موضوعه خاص است. **اثبات و اثبات‌پذیری** مطابق معمول تعریف می‌شوند. بنابراین

$T \vdash \varphi$ یعنی نظریه T فرمول φ را اثبات می‌کند یا اینکه φ در T اثبات پذیر است. یک ارزشدهی e **مدلی** برای نظریه T است اگر $e(\varphi) = 1$ برای تمام فرمول‌های φ در T برقرار باشد. یک **فرمول مدرج** زوجی است مانند (φ, r) به طوری که φ یک فرمول و r عددی گویا در $[0, 1]$ است. این زوج علامت دیگری برای فرمول $(\bar{r} \to \varphi)$ است.

لم ۲.۴.۲. *صورت استنتاجی زیر یک قاعده‌ی استنتاج در RPL است.*

$$\frac{(\varphi, r), (\varphi \to \psi, s)}{(\psi, r * s)}.$$

به این معنی که اگر نظریه T، (φ, r) و $(\varphi \to \psi, s)$ را اثبات کند آنگاه $(\psi, r * s)$ را که در آن $*$، t-نرم لوکاسویچ است، اثبات می‌کند.

برهان. در واقع اگر $T \vdash (\bar{r} \to \varphi)$ و $T \vdash (\bar{s} \to (\varphi \to \psi))$ آنگاه $T \vdash (\bar{s} \& \bar{r}) \to \varphi \& (\phi \to \psi)$ و در نتیجه $T \vdash (\overline{r * s} \to \psi)$. □

توجه داریم که قضیه استنتاج در RPL صادق است به این معنی که $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ اگر و تنها اگر عدد n وجود داشته باشد به طوری که $T \vdash \varphi^n \to \psi$. منظور از φ^n فرمول $\varphi \& \varphi \& ... \& \varphi$ است به تعداد n مرتبه.

می‌توان به کمک تعریف زیر به این مفهوم پرداخت که، درستی اصول موضوعه یا فرمول‌های T ممکن است که درستی فرمول φ را تضمین نکند، ولی تضمین می‌کند که فرمول φ خیلی هم نادرست نیست! به عبارت دیگر نتیجه می‌دهد که ارزش درستی φ حداقل r است. یعنی درستی فرمول‌های در T درستی فرمول $(\bar{r} \to \varphi)$ را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنیم T یک نظریه در RPL باشد و φ یک فرمول باشد، آنگاه:

(۱) درجه درستی φ در T عبارتست از $\| \varphi \|_T = \inf \{e(\varphi) \mid e$ یک مدل برای T است $\}$.

(۲) درجه درستی اثبات‌پذیری φ از T عبارتست از $| \varphi |_T = \sup \{r | T \vdash (\varphi, r)\}$.

لم ۴.۴.۲ (سازگاری). *اگر نظریه T فرمول $(\bar{r} \to \varphi)$ را اثبات نکند، آنگاه $T \cup \{\varphi \to \bar{r}\}$ سازگار است.*

برهان. فرض کنیم $T \cup \{\varphi \to \bar{r}\}$ ناسازگار است. بنابراین $T \cup \{\varphi \to \bar{r}\} \vdash \bar{0}$ و بنا به قضیه‌ی استنتاج، عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $T \vdash (\varphi \to \bar{r})^n \to \bar{0}$. با توجه به اینکه برای فرمول‌های دلخواه φ و ψ در BL فرمول $(\varphi \to \psi)^n \vee (\psi \to \varphi)^n$ درست است پس $T \vdash (\varphi \to \bar{r})^n \vee (\bar{r} \to \varphi)^n$. در نتیجه $T \vdash \bar{0}^n \vee (\bar{r} \to \varphi)^n$، $T \vdash \bar{0} \vee (\bar{r} \to \varphi)^n$ و $T \vdash (\bar{r} \to \varphi)^n$ که تناقض است. □

لم زیر نیز در اثبات قضیه‌ی تمامیت نقش مهمی دارد که آن‌را بدون اثبات می‌آوریم.

لم ۵.۴.۲. *فرض کنیم نظریه T سازگار و کامل است.*

(۱) *برای هر فرمول φ، $|\varphi|_T = \sup\{r | T \vdash \bar{r} \to \varphi\} = \inf\{s | T \vdash \varphi \to \bar{s}\}$،*

(۲) *درجه اثبات‌پذیری فرمول φ با رابط‌ها جابه‌جا می‌شود، یعنی*

$$|\varphi \to \psi|_T = |\varphi|_T \Rightarrow |\psi|_T \text{ و } |\neg\varphi|_T = 1 - |\varphi|_T$$

بنابراین $e(p_i) = |p_i|_T$ یک مدل برای نظریه T است.

قضیه ۶.۴.۲. (تمامیت) *برای نظریه T و هر فرمول φ، درجه اثبات‌پذیری φ با درجه درستی آن برابر است، یعنی $\| \varphi \|_T = | \varphi |_T$.*

برهان. اولاً بنا بر اعتبار RPL داریم $\| \varphi \|_T \leq | \varphi |_T$.
برای اثبات عکس آن باید نشان دهیم که برای هر عدد گویای r که $r <\| \varphi \|$، $T \vdash \bar{r} \to \varphi$. و این معادل است با این که اگر نظریه T فرمول $\bar{r} \to \varphi$ را اثبات نکند، آنگاه $r \geq\| \varphi \|$. اما اگر $T \nvdash \bar{r} \to \varphi$، آنگاه $T \cup \{\varphi \to \bar{r}\}$ با توجه به لم ۴.۴.۲، سازگار است. از این‌رو دارای یک **ابر نظریه** T' است که سازگار و کامل و طبق لم ۵.۴.۲ ارزش‌گذاری e تعریف شده با $e(p_i) = |p_i|_T$ یک مدل برای T' است و $e(\varphi \to \bar{r}) = 1$. در نتیجه $e(\varphi) \leq r$ و این اثبات را کامل می‌کند [۱۰] و [۵]. □

۵.۲ منطق حاصلضرب

در این بخش یکی دیگر از مهم‌ترین منطق‌های گزاره‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این منطق با علامت $PC(\underset{\Pi}{*})$ نمایش داده می‌شود که در آن $\underset{\Pi}{*}$، t-نرم حاصلضرب است (نماد PC را برای منطق گزاره‌ای کلاسیک به کار می‌بریم). ما این منطق را منطق حاصلضرب می‌نامیم و به طور خلاصه با $\prod$ نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که وقتی $x * y = xy$ آنگاه

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \leq y \\ y/x & \text{otherwise} \end{cases}$$

که **استلزام گوگن** نام دارد؛ و

$$(\neg x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 0 \\ 0 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

که **نقیض گودل** نام دارد. دستگاه اصل موضوعی این منطق، توسیعی از BL توسط دو اصل موضوعه در تعریف ۱.۵.۲ می‌باشد. می‌توان با استفاده از $\prod$-جبرهای مرتب خطی که به **جبرهای حاصلضرب** مشهورند، نشان داد که منطق حاصلضربی تام است.

تعریف ۱.۵.۲. اصول موضوعه منطق حاصلضربی $\prod$ عبارتند از اصول موضوعه BL به علاوه اصول زیر:

$$\neg\neg\theta \to \big((\varphi \odot \theta \to \psi \odot \theta) \to (\varphi \to \psi)\big) \quad \text{(i)}$$

$$\varphi \wedge \neg\varphi \to \bar{0} \quad \text{(ii)}$$

ذکر این مطلب لازم است که رابط دوتایی $\odot$ به عنوان **عطف جزیی** تعبیر می‌شود، برای اعداد گویای r و s در $[0, 1]$ داریم $\bar{r} \odot \bar{s} \equiv \overline{r \cdot s}$.

دو لم بعدی اصل‌بندی متفاوتی از $\prod$ ارایه می‌کنند.

لم ۲.۵.۲. $\prod$ *فرمول‌های زیر را اثبات می‌کند* [۵]:

(۱) $\neg(\varphi \odot \psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

(۲) $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

(۳) $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$

برهان. فرمول‌های زیر صورت‌های معادل فرمول (۱) هستند که باید اثبات شود:

$$\big((\varphi \odot \psi) \to \bar{0}\big) \to \big((\varphi \wedge \psi) \to \bar{0}\big)$$

$$\big[\big((\varphi \to (\psi \to \bar{0})\big) \odot (\varphi \wedge \psi)\big] \to \bar{0}$$

$$\big[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi)\big] \to 0$$

حال زنجیر زیر از فرمول‌ها با استفاده از فرمول‌های اثبات‌پذیر در BL و اصول موضوعه‌ی مختلف و بالاخره اصل (ii) قابل اثبات هستند:

$$\big[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi)\big] \to \big[(\varphi \to \neg\psi) \odot \varphi\big] \to \neg\psi$$

$$\big[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi)\big] \to \big[(\varphi \to \neg\psi) \odot \psi\big] \to \psi$$

$$\big[(\varphi \to \neg\psi) \odot (\varphi \wedge \psi)\big] \to \big[\psi \wedge \neg\psi\big] \to 0$$

برای اثبات (۲) طبق (۱) داریم $\neg(\varphi \odot \varphi) \to \neg\varphi$، از این‌رو $(\varphi \odot \varphi \to \bar{0}) \to (\varphi \to \bar{0})$، و $(\varphi \to (\varphi \to \bar{0})) \to (\varphi \to \bar{0})$ بنابراین حکم حاصل می‌شود.

برای اثبات (۳)، اول اینکه طبق (۲) داریم $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\neg\varphi$ همچنین از BL داریم $\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi)$ بنابراین خواهیم داشت $(\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi)$ از طرف دیگر، $(\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$ از این‌رو، طبق (۲) داریم $(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to \neg\neg\neg\varphi$ و مجدداً با استفاده از BL داریم $\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$ و بنابراین $(\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$، و $(\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi)$ با به کارگیری اصل موضوعه $(A_۶)$ برای $\neg\varphi$، $\neg\neg\varphi$ و $\neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$ خواهیم داشت $(\neg\neg\varphi \vee \neg)$. □

لم ۳.۵.۲. *اصل موضوع (ii) را می‌توان با هر یک از فرمول‌های زیر جایگزین کرد [۵]:*

$$\neg(\varphi\odot\varphi)\to\neg\varphi \quad , \quad (\varphi\to\neg\varphi)\to\neg\varphi \quad , \quad \neg\varphi\vee\neg\neg\varphi$$

برهان. در لم قبل ملاحظه نمودیم که هر سه فرمول داده شده در $\prod$ اثبات‌پذیر هستند. حال نشان می‌دهیم که هر یک از آن‌ها همراه با BL و اصل موضوعه (i) اصل موضوعه (ii) را ثابت می‌کنند.

(۱) فرمول $(\varphi\to\neg\varphi)\to\neg\varphi$ را به همراه BL و اصل (i) در نظر می‌گیریم، آنگاه زنجیر زیر از استلزام‌ها اثبات‌پذیر است:

$$(\varphi\wedge\neg\varphi)\to\big[\varphi\odot(\varphi\to\neg\varphi)\big]\to(\varphi\odot\neg\varphi)\to\bar{0}$$

(۲) حال فرمول $\neg(\varphi\odot\varphi)\to\neg\varphi$ را در نظر می‌گیریم؛ آنگاه با این فرض خواهیم داشت $(\varphi\odot\varphi\to\bar{0})\to(\varphi\to\bar{0})$ و در نتیجه $(\varphi\to(\varphi\to\bar{0}))\to(\varphi\to\bar{0})$ که عبارت است از $(\varphi\to\neg\varphi)\to\neg\varphi$ و این همان فرمول (۱) است.

(۳) در نهایت فرمول $\neg\varphi\vee\neg\neg\varphi$ را درنظر می‌گیریم، آنگاه از اصل موضوعه (i) داریم

$$\neg\neg\varphi\to\big((\varphi\odot\varphi)\to(\varphi\odot\bar{0})\big)\to(\varphi\to\bar{0})$$

و برای هر فرمول دلخواه مانند A داریم $\neg\varphi\to\big(A\to(\varphi\to\bar{0})\big)$، از این‌رو

$$\big((\varphi\odot\varphi\to\bar{0})\to(\varphi\to\bar{0})\big)\to(\neg\varphi\vee\neg\neg\varphi).$$

مشاهده می‌کنیم که در BL، $\bar{0}$ با $\varphi\odot\bar{0}$ معادل است. لذا $(\varphi\odot\varphi\to\bar{0})\to(\varphi\to\bar{0})$ یعنی $\neg(\varphi\odot\varphi)\to\neg\varphi$ و این همان (۲) است. $\square$

قضیه ۴.۵.۲. *تمامیت [۵]*

(۱) *فرمول φ در منطق حاصلضرب $\prod$ اثبات پذیر است اگر و تنها اگر در منطق حاصلضرب 1−راستگو باشد.*

(۲) *فرض کنید T یک نظریه متناهی در $\prod$ و φ یک فرمول باشد. نظریه T فرمول φ را در منطق حاصلضرب ثابت می‌کند اگر و تنها اگر φ در هر مدل T درست باشد.*

فصل ۳

منطق گودل-دامت

۱.۳ منطق گودل

منطق گودل G حساب گزاره‌ای با رابطهای $\neg ,\to ,\vee ,\wedge$ و بازه‌ی درستی $[0,1]$ می‌باشد که توابع درستی $\wedge$ و $\vee$ به ترتیب min و max هستند و تابع ارزشی استلزام $\Rightarrow$ عبارتست از

$$(x \Rightarrow y) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \leq y \\ y & \text{otherwise} \end{cases}$$

و تابع ارزشی نقیض عبارتست از

$$(\neg x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x = 0 \\ 0 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

نام منطق گودل از مقاله‌ای که توسط گودل نوشته شد [۴] برگزیده شده است. دامت در [۳] نشان داد که راستگوهای منطق گودل کاملاً با اصول موضوع منطق دامت که از اضافه شدن اصل خطی $(\varphi \to \psi)\vee(\psi \to \varphi)$ به اصول منطق شهودی به دست می‌آید، اصل بندی می‌شوند و به همین دلیل این منطق را منطق گودل- دامت نیز می‌نامند. بنابراین با این تعریف G یک منطق میانی است و در کنار معناشناسی چند ارزشی، معناشناسی کریپکی را نیز با استفاده

از منطق شهودی داراست (که قاب‌های آن مرتب خطی هستند). دقت داریم که گاهی نفی را می‌توانیم به طور معادل با $\bar{0}$ (نادرست) یکسان در نظر بگیریم و $\neg\varphi$ را به صورت $\varphi \to \bar{0}$ تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که رابطه‌های منطق شهودی درون تعریف شدنی[۱] نیستند، به عنوان مثال $\wedge$ از روی بقیه‌ی رابطها تعریف نمی‌شود، از طرفی $\wedge$ در منطق کلاسیک و همچنین لوکاسویچ، توسط دو رابط $\to$ و $\neg$ به راحتی تعریف می‌شود ($\varphi \wedge \psi \equiv \neg(\varphi \to \neg\psi)$) مرجع [۵] را ملاحظه کنید. در منطق گودل، رابط فصل با استفاده از رابطهای عطف و استلزام قابل تعریف است یعنی $\varphi \vee \psi \equiv \big((\varphi \to \psi) \to \psi\big) \wedge \big((\psi \to \varphi) \to \varphi\big)$ ([۳]). بندوا در [۱] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱.۱.۳. *در منطق گودل، رابط عطف با استفاده از استلزام و نقیض تعریف شدنی نیست.* [۱]

برهان. طبق توضیحات فوق، کافیست نشان دهیم که $\wedge$ با استفاده از $\to$ و $\bar{0}$ تعریف نمی‌شود. با استقرا نشان می‌دهیم که هیچ ترم $t(x,y)$ از x، y، $\Rightarrow$ و $\bar{0}$ به طوری که برای هر $x, y < 1$، $t(x,y) = \min(x,y)$ باشد، وجود ندارد. برای ترم‌های اتمی x و y و $\bar{0}$ مطلب بدیهی است. فرض کنیم $t(x,y)$ عبارتست از $u(x,y) \Rightarrow v(x,y)$ و برای هر $x, y < 1$ داشته باشیم $t(x,y) = \min(x,y)$. نشان می‌دهیم که برای هر $x, y < 1$، داریم $v(x,y) = \min(x,y)$ (و v ترم ساده‌تر است)؛ بنابراین قضیه با فرض استقرا برقرار خواهد بود. در واقع، اگر $x \leq y < 1$ آنگاه طبق تعریف $t(x,y)$ داریم $t(x,y) = x < 1$ و از طرفی طبق تعریف استلزام، $v(x,y) = x$، زیرا

$$\big(u(x,y) \Rightarrow v(x,y)\big) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad u(x,y) \leq v(x,y) \\ v(x,y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

به طور مشابه برای $y \leq x < 1$ مطلب برقرار است؛ که این با کوچکترین بودن ترم $t(x,y)$ با شرایط گفته شده در تناقض است. □

[۱] Interdefinable

قضیه ۲.۱.۳. *در منطق گودل، رابط فصل با استفاده از استلزام و نقیض تعریف شدنی نیست*

برهان. کافیست نشان دهیم که $\vee$ با استفاده از $\rightarrow$ و $\bar{0}$ تعریف نمی‌شود. به عبارت دیگر هیچ ترمی مثل $t(x,y)$ از دو متغیر (روی بازه $[0,1]$) ساخته نمی‌شود. ثابت را با $\bar{0}$ و استلزام گودل را با $\Rightarrow$ نشان می‌دهیم. با استقراء نشان می‌دهیم که هیچ ترم $t(x,y)$ از x، y، $\Rightarrow$ و $\bar{0}$ وجود ندارد به طوری که برای هر $x,y<1$، داشته باشیم $t(x,y)=\max(x,y)$. برای ترم‌های اتمی x، y و $\bar{0}$ مطلب واضح است. فرض کنیم $t(x,y)$ عبارت است از $u(x,y)=v(x,y)$ و برای هر $x,y<1$، $t(x,y)=\max(x,y)$؛ اگر نشان دهیم که برای هر $x,y<1$ داریم $v(x,y)=\max(x,y)$ آنگاه قضیه با فرض استقراء اثبات خواهد شد. اگر $x\leq y<1$ باشد آنگاه طبق تعریف $t(x,y)=y<1$ و لذا داریم

$$y=\big[u(x,y)\Rightarrow v(x,y)\big]=\begin{cases}1 & \text{if}\quad u(x,y)\leq v(x,y)\\ v(x,y) & \text{otherwise}\end{cases}$$

یعنی $v(x,y)=y=\max(x,y)$. به طور مشابه اگر $y<x<1$ باشد بنا به تعریف $t(x,y)=x$ از

$$x=t(x,y)=\big[u(x,y)\Rightarrow v(x,y)\big]=\begin{cases}1 & \text{if}\quad u(x,y)\leq v(x,y)\\ v(x,y) & \text{otherwise}\end{cases}$$

خواهیم داشت $v(x,y)=x=max(x,y)$. □

در این مقاله همچنین بندوا سوالات زیر را مطرح نمود و یک سال بعد پاسخ این سوالات را به همراه اشویدار[۲] در مرجع [۸] منتشر کرد که در ادامه بعد از بیان سوالات به موضوعات آن مقاله می‌پردازیم.

(۱) در منطق گودل، آیا $\wedge$ از رابط‌های $\rightarrow$، $\neg$ و $\vee$ تعریف شدنی است؟

[۲] V.Švejdar

(۲) در منطق گودل، آیا رابط $\rightarrow$ از رابطهای $\wedge$، $\vee$ و $\neg$ تعریف شدنی است؟ (به وضوح، رابط $\rightarrow$ با استفاده از $\wedge$، $\vee$ و $\bar{0}$ تعریف شدنی نیست.)

(۳) اگر پاسخ سوال (۲) مثبت باشد، آیا $\rightarrow$ با استفاده از $\wedge$ و $\neg$ تعریف شدنی است؟

یک راه مشترک برای ساختن حساب هیلبرت گونه (یا فرگه[۳]) برای منطق G، در نظر گرفتن حساب هیلبرت برای منطق شهودی گزاره‌ای است (مرجع [۳] را ملاحظه بفرمایید) که به طرح اصل موضوع خطی یعنی $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$ مجهز شده باشد. یک معناشناسی برای منطق شهودی به وسیله‌ی مدل‌های کریپکی است. قبلاً در فصل معرفی منطق شهودی این مدل‌ها تعریف شده است اما به دلیل اهمیت آن‌ها و روش مورد استفاده در مرجع [۸] دوباره تعریف را مطرح می‌کنیم. یک **قاب کریپکی** برای منطق شهودی، ساختاری به صورت $\langle K, R\rangle$ است که R یک رابطه‌ی ترتیب روی مجموعه‌ی ناتهی K می‌باشد و آن‌را رابطه دسترسی می‌نامیم، روی قاب کریپکی **مدل کریپکی** را به صورت یک سه تایی $\langle K, R, \vDash\rangle$ تعریف می‌کنیم که در آن $\vDash$ (رابطه ارضاء) رابطه‌ای بین اعضای K و فرمول‌های گزاره‌ای است که برای هر $k, k' \in K$ و فرمول‌های φ و ψ و همه‌ی اتم‌ها مانند p داریم:

- اگر $k\,R\,k'$ و $k \vDash p$ آنگاه $k' \vDash p$ (پایایی)؛
- $k \vDash \varphi \& \psi$ اگر وتنها اگر $k \vDash \varphi$ و $k \vDash \psi$؛
- $k \vDash \neg\varphi$ اگر و تنها اگر برای هر k' که $k\,R\,k'$ داشته باشیم $k' \nvDash \varphi$؛
- $k \vDash \varphi \rightarrow \psi$ اگر و تنها اگر برای هر k'ی که $k\,R\,k'$ داشته باشیم $k' \vDash \psi$ یا $k' \nvDash \varphi$.

این شرایط فقط برای اتم‌ها برقرار نیست و برای همه‌ی فرمول‌ها نیز به کار می‌رود.

لم ۳.۱.۳. *منطق فازی گودل G نسبت به کلاس همه‌ی مدل‌های کریپکی $\langle K, R, \vDash\rangle$ که قاب $\langle K, R\rangle$ خطی است، صحیح می‌باشد.*

---

[۳] Frege

برهان. اگر $k \nvDash ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$ آنگاه طبق تعریف مدل کریپکی، k_1 و k_2 ای وجود دارد به طوری که kRk_1، kRk_2، $k_1 \vDash \varphi$، $k_1 \nvDash \psi$، $k_2 \vDash \psi$، $k_2 \nvDash \varphi$. با توجه به خاصیت پایایی، k_1 و k_2 قابل مقایسه نیستند. بنابراین طرح اصل خطی فقط در مدلی که قاب آن همبند نباشد نقض می‌شود. حکم از صحت منطق شهودی نسبت به مدل‌های کریپکی حاصل می‌شود. □

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم $\mathcal{K} = \langle K, R, \vDash \rangle$ یک مدل کریپکی باشد، همچنین قرار می‌دهیم $D_{\mathcal{K}}(\varphi) = \{k \in K | k \vDash \varphi\}$ در این صورت می‌گوییم φ مجموعه‌ی $D_{\mathcal{K}}(\varphi)$ را **تعریف می‌کند**. مجموعه‌ی $X \subseteq K$ را **تعریف پذیر** گوییم هرگاه برای فرمولی مانند φ داشته باشیم $X = D_{\mathcal{K}}(\varphi)$. گاهی برای راحتی به جای $D_{\mathcal{K}}(\varphi)$ از $D(\varphi)$ استفاده می‌کنیم. دقت داریم که هر مجموعه‌ی تعریف پذیر X از بالا بسته است.

لم ۵.۱.۳. *فرض کنیم $\mathcal{K} = \langle K, R, \vDash \rangle$ یک مدل کریپکی دلخواه باشد. اگر $G \vdash \varphi \to \psi$ آنگاه $D_{\mathcal{K}}(\varphi) \subseteq D_{\mathcal{K}}(\psi)$ است و اگر $G \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ آنگاه $D_{\mathcal{K}}(\varphi) = D_{\mathcal{K}}(\psi)$.*

برهان. فرض کنیم $\mathcal{K} = \langle K, R, \vDash \rangle$ یک مدل کریپکی و $k_1 \in D_{\mathcal{K}}(\varphi)$ باشد. طبق تعریف خواهیم داشت $k_1 \vDash \varphi$ از طرف دیگر طبق فرض داریم $G \vdash \varphi \to \psi$ که از اینجا نتیجه می‌شود $k_1 \vDash \psi$ و باز هم طبق تعریف $k_1 \in D_{\mathcal{K}}(\psi)$ نتیجه می‌شود و حکم به دست می‌آید. قسمت دوم لم نیز به طور مشابه ثابت می‌شود. □

قضیه ۶.۱.۳. *فرمول $p\&q$، G-هم ارز با هیچ فرمول دیگری که از p و q و فقط رابط‌های $\to$، $\vee$ و $\neg$ ساخته شده باشد، نیست. فرمول $p \to q$ نیز G-هم ارز با هیچ فرمولی که از p و q و رابط‌های $\&$، $\vee$ و $\neg$ ساخته شده باشد، نیست. پس در منطق G، رابط‌های عطف و استلزام از سه رابط منطقی باقی مانده در زبان این منطق بیان شدنی[۴] نیستند.*

برهان. مدل کریپکی زیر را در نظر می‌گیریم که دامنه، رابطه‌ی دسترسی و رابطه‌ی ارضاء شدن در آن به ترتیب عبارتند از:

[۴] Expressible

$K = \{k_1, k_2, k_3\}$،

$R = \{\langle k_1, k_1\rangle, \langle k_2, k_2\rangle, \langle k_3, k_3\rangle, \langle k_1, k_2\rangle\}$ و

$\vDash = \{\langle k_1, p\rangle, \langle k_2, p\rangle, \langle k_2, q\rangle, \langle k_3, q\rangle\}$.

$$\begin{tikzcd} k_2(p,q) & \\ k_1(p) \arrow[u] & \bullet k_3(q) \end{tikzcd}$$

این مدل همبند است و اتم p مجموعه‌ی $\{k_1, k_2\}$ را و اتم q مجموعه‌ی $\{k_2, k_3\}$ را و فرمول $p\&q$ مجموعه‌ی $\{k_2\}$ را تعریف می‌کند. با استقرا مطالب زیر را ثابت می‌کنیم:

اگر φ شامل عطف نباشد و $k_2 \in D(\varphi)$ باشد آنگاه $k_1 \in D(\varphi)$ یا $k_3 \in D(\varphi)$. بنابراین هیچ فرمول φی که شامل $\&$ نباشد نمی‌تواند مجموعه‌ی $\{k_2\}$ را تعریف کند و لذا هیچ فرمولی هم ارز با $p\&q$ نیست.

حال گام استقرا را برای استلزام نشان می‌دهیم، گام‌های بعدی مشابه و ساده‌تر هستند. فرض کنیم فرمول φ عبارتست از $\psi \to \theta$ و همچنین $k_2 \in D(\varphi)$. پس $k_2 \notin D(\psi)$ یا $k_2 \in D(\theta)$. اگر $k_2 \notin D(\psi)$ آنگاه از پایایی $\vDash$ داریم $k_1 \notin D(\psi)$ و $\{k_1, k_2\} \subseteq D(\psi \to \theta)$. اگر $k_2 \in D(\theta)$ آنگاه با فرض استقرا برای θ، یا $k_1 \in D(\theta)$ یا اینکه $k_3 \in D(\theta)$. این کافیست چون $D(\theta) \subseteq D(\psi \to \theta)$.

بحثی مشابه نشان می‌دهد که در مدل کریپکی نشان داده شده در شکل زیر فرمول $p \to q$ مجموعه‌ی $\{k_2, k_3\}$ را تعریف می‌کند در حالی که هیچ فرمولی که شامل استلزام نباشد این مجموعه را تعریف نمی‌کند.

$$\begin{tikzcd} k_2(p,q) & \\ k_1(p) \arrow[u] & k_3() \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$\square$

در انتهای این فصل قضیه مشهور گودل که نشان می‌دهد منطق شهودی معادل هیچ منطق متناهیاً ارزشی نیست را (با برهانی جدید) ثابت می‌کنیم:

قضیه ۷.۱.۳ (گودل [۴]). *منطق شهودی متناهیاً چند ارزشی نیست.*

برهان. فرمول زیر را برای اتم‌های $p_0, p_1, ..., p_n$ درنظر می‌گیریم:

$$\varphi \equiv \bigvee_{i<j\leq n} (p_i \to p_j)$$

این فرمول در هر منطق n ارزشی شامل منطق شهودی، یک راستگو است (زیرا $n+1$ اتم داریم و n ارزش، پس طبق اصل لانه کبوتری دو اتم هم‌ارزش خواهیم داشت و بنابراین زیر فرمولی به صورت $p \to p$ که راستگو بوده وجود خواهد داشت و از آنجا که ترکیب فصلی آن با هر فرمول باز هم راستگو است، کل فرمول همواره درست خواهد بود). اما فرمول φ در منطق شهودی راستگو نیست، برای دیدن این مطلب کافیست مدل کریپکی مانند $\langle K, R, \vDash \rangle$ را در نظر بگیریم که در آن

$K = \{k_0, k_1, ..., k_n\}$،

$R = \{\langle k_0, k_1\rangle, \langle k_0, k_2\rangle, ..., \langle k_0, k_n\rangle\}$ و

$\vDash = \{\langle k_1, p_0\rangle, \langle k_2, p_1\rangle, ..., \langle k_n, p_{n-1}\rangle\}$.

$$\begin{tikzcd}
k_1(p_0) & k_2(p_1) & \cdots & k_n(p_{n-1}) \\
k_0() \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

با این تعریف در $k_0 \in K$ داریم $k_0 \nvDash p_i \to p_j$ برای هر $i < j \leq n$، زیرا در $k_0 \, R \, k_{i+1}$ داریم $k_{i+1} \vDash p_i$ ولی $k_{i+1} \nvDash p_j$. پس فرمول φ در این مدل ارضاء نمی‌شود. □

فصل ۴

معناشناسی کریپکی برای منطق‌های فازی

قاب‌های کریپکی یک معناشناسی برای منطق‌های وجهی و زیرکلاسیک مانند منطق شهودی (براور و هیتینگ[1]) و منطق پایه (ویسر[2]) فراهم می‌کنند. منطق پایه‌ی ویسر نسبت به قاب‌های تراگذری صحیح و قویاً کامل است و منطق شهودی نسبت به قاب‌های کریپکی بازتابی و تراگذری صحیح و قویاً کامل می‌باشد. می‌توان انتظار داشت که کلاس قاب‌های کریپکی بتواند یک معناشناسی برای منطق فازی پایه فراهم کند.

۱.۴ تعاریف و گزاره‌ها

تعریف ۱.۱.۴ (قاب‌های کریپکی). یک قاب کریپکی یک گراف جهت‌دار است یعنی یک زوج مرتب $\langle K, R\rangle$ که $R \subseteq K^2$ یک رابطه دوتایی روی K است. در این قاب اعضای K را گره می‌نامیم و رابطه R رابطه دسترسی نام دارد؛ اگر kRk' آنگاه گره k' از k قابل دسترسی است.

تعریف ۲.۱.۴ (بازتابی و تراگذری بودن). رابطه‌ی $R \subseteq K \times K$ را

[1] Brouwer and Heyting

[2] A. Visser

- *بازتابی* نامیم اگر برای هر $k \in K$ داشته باشیم kRk.
- *تراگذری* نامیم اگر برای هر $k, k', k'' \in K$ ، با فرض kRk' و $k'Rk''$ آنگاه kRk'' برقرار باشد.

یک قاب کریپکی بازتابی یا انعکاسی است اگر رابطه‌ی R این طور باشد.

تعریف ۳.۱.۴ (بستار تراگذری). برای رابطه‌ی دوتایی $R \subseteq K \times K$ روی K و گره‌ای مانند $k \in K$، تعریف می‌کنیم:

- $R^1[k] = R[k] = \{x \in K \mid kRx\}$ تصویر $\{k\}$ تحت R باشد.
- $R^2[k] = \{x \in K \mid \exists y \in K(kRyRx)\}$؛ و به طور کلی برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم
- $R^n[k] = \{x \in K \mid \exists y_1, \ldots, y_{n-1} \in K(kRy_1Ry_2R\cdots Ry_{n-1}Rx)\}$.

لذا بستار تراگذری R روی $\{k\}$ عبارتست از $R^+[k] = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n[k]$. همچنین تعریف می‌کنیم $R^{++}[k] = \bigcup_{n=2}^{\infty} R^n[k]$.

تعریف ۴.۱.۴ (همبند بودن). یک رابطه $R \subseteq K \times K$ همبند نامیده می‌شود، اگر برای هر $k \in K$ و هر $k', k'' \in R^+[k]$ یکی از روابط $k'Rk''$ یا $k''Rk'$ برقرار باشد.

تعریف ۵.۱.۴ (نحو منطق فازی). فرمول‌های منطق فازی گزاره‌ای از ثابت $\bot$ (برای نادرستی) و رابط‌های $\&, \to$ (برای عطف و شرط) به همراه یک مجموعه‌ی نامتناهی شمارا از اتم‌ها که با Atoms نمایش داده می‌شوند، ساخته می‌شوند.
در این زبان برای نمایش نقیض فرمول φ می‌نویسیم $\varphi \to \bot$.

تعریف ۶.۱.۴ (مدل‌های کریپکی). یک مدل کریپکی یک سه تایی $\mathcal{K} = \langle K, R, \vDash\rangle$ است که در آن $\langle K, R\rangle$ یک قاب کریپکی است و $\vDash \subseteq K \times \text{Atoms}$ رابطه‌ی ارضاء شدن می‌باشد. رابطه ارضاء شدن به همه‌ی فرمول‌ها تعمیم می‌یابد، یعنی $\vDash \subseteq K \times \text{Formulas}$:

- هیچ گره ای $\bot$ را ارضاء نمی‌کند یعنی برای هر $k \in K$ داریم $k \nvDash \bot$.

- رابط عطف زمانی ارضاء می شود که هر مولف از آن ارضاء شود و برعکس یعنی $k \vDash \psi$ و $k \vDash \varphi \iff k \vDash (\varphi \& \psi)$.

- گزاره شرطی ارضاء می‌شود اگر و تنها اگر چنانچه یک گره قابل دسترس مقدم را ارضاء کند آنگاه تالی را نیز ارضاء نماید یعنی
$k \vDash (\varphi \to \psi) \iff \forall k' \in R[k] \big(k' \vDash \varphi \longrightarrow k' \vDash \psi\big)$.

یادآوری ۷.۱.۴ (درستی). فرمول $\bot \to \bot$ همیشه درست است و در هر گره‌ای از هر مدل کریپکی برقرار است (از روی تعریف). برای نمایش درستی از نماد $\top (= \bot \to \bot)$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۸.۱.۴ (ارضاء شدن). یک فرمول در یک مدل کریپکی ارضاء می‌شود اگر در هر گره‌ای از مدل ارضاء شود.
یک قاب کریپکی یک فرمول را ارضاء می‌کند اگر هر مدل کریپکی با پایه آن قاب، فرمول را ارضاء کند.
یک قاعده در یک مدل کریپکی ارضاء شده نامیده می‌شود اگر ارضاء شدن فرض (مفروضات) مقدماتی قاعده در یک گره، منجر به ارضاء شدن نتیجه قاعده در همان گره شود.
یک قاعده در یک قاب کریپکی ارضاء شده نامیده می‌شود هرگاه در هر مدل با پایه این قاب ارضاء شود.

تعریف ۹.۱.۴ (پایایی). رابطه‌ی ارضاء شدن $\vDash \subseteq K \times \mathsf{Atoms}$ پایا(ی اتمی) نسبت به $R \subseteq K \times K$ نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $k, k' \in K$ و $p \in \mathsf{Atoms}$، اگر $k \vDash p$ و kRk' آنگاه داشته باشیم $k' \vDash p$؛ این خاصیت پایایی اتمی نامیده می‌شود.
یک رابطه $\vDash \subseteq K \times \mathsf{Formulas}$ پایا(ی فرمولی) نسبت به $R \subseteq K \times K$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $k, k' \in K$ و هر فرمول $\varphi \in \mathsf{Formulas}$، اگر $k \vDash \varphi$ و kRk' آنگاه داشته باشیم $k' \vDash \varphi$؛ این خاصیت را پایایی فرمولی می‌نامیم.

قرارداد تحدید رابطه‌ی $S \subseteq A \times B$ به زیرکلاس $C \subseteq A$ با $S|_C$ نمایش داده می‌شود یعنی $S|_C = S \cap (C \times B)$.

گزاره **۱۰.۱.۴ (پایایی اتمی/فرمولی).** *در یک مدل کریپکی* $\langle K, R, \vDash \rangle$ *اگر برای یک گره* $k \in K$ *تحدید* R *به* $R^+[k]$ *یعنی* $R|_{R^+[k]}$ *تراگذری باشد آنگاه پایایی اتمی در (هر گره‌ای از)* $R^+[k]$ *پایایی فرمولی (در* $R^+[k]$*) را نتیجه می‌دهد.*

برهان. با استقرا روی فرمول φ نشان می‌دهیم که برای هر $k', k'' \in R^+[k]$ اگر $k'Rk''$ و $k' \vDash \varphi$ آنگاه $k'' \vDash \varphi$:

- برای هر فرمول اتمی φ طبق فرض داریم $k'' \vDash \varphi$ (همچنین طبق تعریف همیشه خواهیم داشت $k'' \nvDash \bot$).
- برای $\varphi = \psi \& \theta$ (که ψ و θ فرمول هستند) طبق تعریف $k' \vDash \psi$ و $k' \vDash \theta$ بنابراین با فرض استقرا خواهیم داشت $k'' \vDash \psi$ و $k'' \vDash \theta$ پس داریم $k'' \vDash \psi \& \theta$.
- برای $\varphi = \psi \to \theta$ نشان می‌دهیم که $k'' \vDash \psi \to \theta$ که این هم ارز است با $\forall k''' \in R[k''] \left(k''' \vDash \psi \Longrightarrow k''' \vDash \theta\right)$.

پس فرضیات ما عبارتند از:

(۱) $R|_{R^+[k]}$ تراگذری است،

(۲) $k' \vDash \psi \to \theta$،

(۳) $k''' \vDash \psi$،

(۴) برای $k', k'', k''' \in R^+[k]$ داریم $k' \, R \, k'' \, R \, k'''$.

با استفاده از (۱) و (۴) داریم $k'Rk'''$ و با استفاده از فرض (۲) و (۳) نتیجه‌ی $k''' \vDash \theta$ حاصل می‌شود. $\square$

***لم* ۱۱.۱.۴ (تراگذری).** *در یک قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$ اگر R بازتابی باشد و برای هر $k \in K$، تحدید رابطه R به $R^+[k]$ یعنی $R|_{R^+[k]}$ تراگذری باشد آنگاه R نیز تراگذری است.*

برهان. فرض کنیم R تراگذری نباشد (فرض خلف)، در این صورت گره‌هایی مثل k_1, k_2, k_3 در K وجود دارند به طوری که k_1Rk_2 و k_2Rk_3 ولی $k_1 \not R k_3$. حال $k_2, k_3 \in R^+[k_1]$ به وضوح برقرار است و طبق بازتابی بودن R همچنین داریم $k_1 \in R^+[k_1]$. اما در این صورت $R|_{R^+[k_1]}$ تراگذری نخواهد بود که این تناقض است! $\square$

۲.۴ منطق فازی پایه و قاب‌ها/مدل‌های کریپکی

***گزاره* ۱.۲.۴ (عمومیت A_2, A_3, A_7 و $\varphi \to \varphi \& \varphi$).** *اصول موضوعه (A_2)، (A_3) و (A_7) و همچنین فرمول $\varphi \to (\varphi\&\varphi)$ در هر قاب کریپکی ارضاء می‌شوند.*

همچنین به راحتی می‌توان چک کرد که MP در هر قاب کریپکی بازتابی ارضاء می‌شود؛ عکس این مطلب نیز درست است.

***قضیه* ۲.۲.۴ (MP و بازتابی بودن).** *تنها قاعده منطق فازی پایه (MP) در یک قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$ ارضاء می‌شود اگر و تنها اگر R بازتابی باشد.*

برهان. اگر R بازتابی باشد آنگاه برای هر $k \in K$ فقط به این دلیل که kRk خواهیم داشت $k \vDash \varphi,\ k \vDash \varphi \to \psi \implies k \vDash \psi$. برعکس، اگر رابطه‌ی R بازتابی نباشد آنگاه $k \in K$ موجود است به طوری که $k \not R k$. برای اتم‌های p, q رابطه ارضاء شدن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vDash = \big(K \times \{p\}\big) \cup \big(R[k] \times \{q\}\big)$$

آنگاه $k \vDash p$ و $k \vDash p \to q$ زیرا برای هر k'، اگر kRk' آنگاه $k' \vDash q$. اما چون $k \notin R[k]$ پس $k \nvDash q$. بنابراین، قاعده (MP) در گره k ارضاء نمی‌شود. $\square$

اصل موضوعه (A_1) در هر قاب کریپکی تراگذری ارضاء می‌شود. قضیه زیر به طور دقیق قاب‌هایی که این اصل را ارضاء می‌کنند توصیف می‌کند.

قضیه ۳.۲.۴ (A_1 و تراگذری). *اصل موضوعه* (A_1) *در یک قاب کریپکی* $\langle K,R\rangle$ *ارضاء می‌شود اگر و تنها اگر برای هر* $k\in K$ *رابطه* $R|_{R^+[k]}$ *تراگذری باشد.*

برهان. نقطه $k\in K$ را تثبیت می‌کنیم و همچنین فرض می‌کنیم که $R|_{R^+[k]}$ تراگذری باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $k\vDash(A_1)$ یا به طور معادل

$$.\forall k'\in R[k]\left(k'\vDash(\varphi\to\psi)\Longrightarrow k'\vDash[(\psi\to\theta)\to(\varphi\to\theta)]\right)$$

پس کافیست نشان دهیم برای یک $k'\in R[k]$ ثابت با فرض $k'\vDash(\varphi\to\psi)$، داریم

$$\forall k''\in R[k']\left(k''\vDash\psi\to\theta\Longrightarrow k''\vDash\varphi\to\theta\right)$$

و این معادل است با اینکه برای یک $k''\in R[k']$ ثابت با فرض $k''\vDash\psi\to\theta$ داشته باشیم $\forall k'''\in R[k'']\left(k'''\vDash\varphi\Longrightarrow k'''\vDash\theta\right)$. لذا فرضیات ما عبارتند از:

(۱) رابطه $R|_{R^+[k]}$ تراگذری است و $k\,R\,k'\,R\,k''\,Rk'''$،

(۲) $k'\vDash\varphi\to\psi$،

(۳) $k''\vDash\psi\to\theta$،

(۴) $k'''\vDash\varphi$.

و نشان خواهیم داد که $k'''\vDash\theta$: به کمک (۱) از آنجا که $k''',k'',k'\in R^+[k]$ داریم $k'\,R\,k'''$ و از روی (۲) و (۴) می‌توان نتیجه گرفت $k'''\vDash\psi$، بنابراین از روی (۳) حکم $k'''\vDash\theta$ نتیجه می‌شود. لذا یک طرف قضیه ثابت شد.
برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید برای گره $k_0\in K$ در قاب کریپکی $\langle K,R\rangle$ رابطه‌ی $R|_{R^+[k_0]}$ تراگذری نباشد؛ یعنی $k_1,k_2,k_3\in R^+[k_0]$ موجودند به طوری که $k_1\,R\,k_2\,R\,k_3$ اما $k_1\not R\,k_3$. برای اتم‌های p,q,r رابطه ارضاء شدن $\vDash$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\left(K\times\{p\}\right)\cup\left(R[k_1]\times\{q\}\right)\cup\left((R[k_1]\cap R[k_2])\times\{r\}\right)$$

چون داریم $k_1,k_2,k_3\in R^+[k_0]$ پس $\ell_1,\cdots,\ell_n\in K$ (برای $n\geqslant 0$) موجودند به طوری که $k_0R\ell_1R\cdots R\ell_nRk_1Rk_2Rk_3$ (اگر $n=0$ آنگاه $\ell_n=k_0$). حال نشان می‌دهیم که نمونه

$[(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$ از اصل موضوعه (A_1) در ℓ_n ارضاء نمی‌شود. توجه داشته باشید که چون برای $k_3 \in R[k_2]$، $k_3 \vDash p$ اما $k_3 \nvDash r$ آنگاه $k_2 \nvDash p \to r$، و از طرفی چون برای هر $k \in K$ اگر $k_2Rk \vDash q$ آنگاه $k \in R[k_2]$ و $k \in R[k_1]$ و از آنجا $k \vDash r$ نتیجه می‌شود، پس $k_2 \vDash q \to r$. لذا می‌توان نتیجه گرفت که $k_1 \nvDash (q \to r) \to (p \to r)$ اما $k_1 \vDash p \to q$ زیرا برای هر $k \in K$، اگر $k_1Rk \vDash p$ آنگاه $k \in R[k_1]$ و بنابراین $k \vDash q$. در نهایت داریم $\ell_n \nvDash (p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$. $\square$

می‌توان دید که اصل موضوعه (A_4) در هر قاب کریپکی بازتابی که رابطه‌ی ارضاء شدنش (فرمول) پایا باشد (تحت رابطه ی دسترسی) ارضاء می‌شود. در قضیه زیر مشخصه‌سازی دقیقی را برای مدل‌های کریپکی که این اصل در آن‌ها ارضاء می‌شود ارایه می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۴ (A_4 و بازتابی و پایایی). *اصل موضوعه (A_4) در هر مدل کریپکی $\langle K, R, \vDash\rangle$ که به ازای هر $k \in K$، تحدید رابطه‌ی $R|_{R^+[k]}$ بازتابی و $\vDash|_{R^+[k]}$ پایای فرمولی نسبت به R باشد، ارضاء می‌شود. برعکس، اگر (A_4) در یک مدل کریپکی ارضاء شود آنگاه برای هر $k \in K$ رابطه‌ی $R|_{R^+[k]}$ بازتابی است و تحدید رابطه‌ی ارضاء شدن به مجموعه‌های $R^+[k]$ (برای هر $k \in K$) روی آن قاب‌ها باید پایای فرمولی نسبت به R باشد.*

برهان. برای یک مدل کریپکی ثابت مثل $\langle K, R, \vDash\rangle$ و نقطه ثابت $k \in K$، فرض کنید $R|_{R^+[k]}$ بازتابی و $\vDash|_{R^+[k]}$ پایای فرمولی باشد. نشان می‌دهیم که $k \vDash (A_4)$ یا به طور معادل

$$\forall k' \in R[k]\big(k' \vDash \varphi\&[\varphi \to \psi] \Longrightarrow k' \vDash \psi\&[\psi \to \varphi]\big).$$

پس کافیست که با فرض $kRk' \vDash \varphi\&[\varphi \to \psi]$ نشان دهیم

$$k' \vDash \psi \text{ و } \forall k'' \in R[k']\big(k'' \vDash \psi \Longrightarrow k'' \vDash \varphi\big).$$

پس فرضیات ما عبارتند از:

(۱) رابطه $R|_{R^+[k]}$ بازتابی است و داریم $kRk'Rk''$،

(۲) $k' \vDash \varphi\&[\varphi \to \psi]$، (۳) $k'' \vDash \psi$،

(۴) $\vDash|_{R^{+}[k]}$ فرمول پایدار است.

نشان می‌دهیم که $k' \vDash \psi$ و $k'' \vDash \varphi$. از (۲) داریم (۵) $k' \vDash \varphi$ و (۶) $k' \vDash \varphi \to \psi$ و از (۱) و (۴) خواهیم داشت $k'' \vDash \varphi$. دوباره از (۱) نتیجه می‌شود $k'Rk'$، که از این مطلب به همراه فرضیات (۵) و (۶) نتیجه می‌گیریم $k' \vDash \psi$.
برای عکس قضیه، فرض می‌کنیم که اصل موضوعه $(A_۴)$ در یک قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$ ارضاء شود و نشان می‌دهیم که برای هر $k \in K$ رابطه $R|_{R^{+}[k]}$ بازتابی است. اگر رابطه $R|_{R^{+}[k_۰]}$ برای یک $k_۰ \in K$ بازتابی نباشد، آنگاه گره‌های $\ell_۱, \cdots, \ell_n \in K$ $(n \geqslant ۰)$ موجودند به طوری که $k_۰ R \ell_۱ R \cdots R \ell_n R k_۱ \not R k_۱$. رابطه ارضاء شدن $\vDash$ را برای یک اتم p به صورت $\langle k_۱, p\rangle$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که تحت این رابطه، نمونه $(p\&[p \to q]) \to (q\&[q \to p])$ از اصل موضوعه $(A_۴)$ در گره ℓ_n ارضاء نمی‌شود. دلیل این ادعا این است که به کمک تعریف داریم $k_۱ \vDash p\&(p \to q)$ و ضمناً برای هیچ گره‌ای مانند $k \in R[k_۱]$ نمی‌توان نتیجه گرفت $k \vDash p$ (چون $k_۱ \not R k_۱$). از سوی دیگر با استفاده از تعریف، $k_۱ \nvDash q$ و بنابراین $k_۱ \nvDash q\&(q \to p)$.
حال، فرض کنید $\vDash|_{R^{+}[k_۰]}$ نسبت به R در یک مدل کریپکی $\langle K, R, \vDash\rangle$ و گره $k_۰ \in K$ پایای فرمولی نباشد، پس دو گره $k_۱, k_۲ \in R^{+}[k_۰]$ و فرمول φ موجودند به طوری که $k_۱ R k_۲$ و $k_۱ \vDash \varphi$ ولی $k_۲ \nvDash \varphi$. همچنین گره‌های $\ell_۱, \cdots, \ell_n \in K$ $(n \geqslant ۰)$ موجودند به طوری که $k_۰ R \ell_۱ R \cdots R \ell_n R k_۱$. نشان می‌دهیم که نمونه $(\varphi\&[\varphi \to \top]) \to (\top\&[\top \to \varphi])$ از اصل موضوعه $(A_۴)$ در ℓ_n از مدل $\langle K, R, \vDash\rangle$ ارضاء نمی‌شود. دلیل این ادعا این است که در $k_۱$ (که $\ell_n R k_۱$ برقرار است) داریم $k_۱ \vDash \varphi\&[\varphi \to \top]$ (چون برای هر گره k حکم $k \vDash \top$ برقرار است) اما $k_۱ \nvDash \top \to \varphi$ زیرا برای $k_۲ \in R[k_۱]$ داریم $k_۲ \nvDash \varphi$ (و البته $k_۲ \vDash \top$). $\square$

اصل موضوعه $(A_۵ a)$ در هر قاب کریپکی بازتابی ارضاء می‌شود؛ در قضیه زیر یک مشخصه‌سازی دقیق ارایه می‌شود.

قضیه ۵.۲.۴ ($A_۵ a$ و بازتابی بودن). *اصل موضوعه $(A_۵ a)$ در یک قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$ ارضاء می‌شود اگر وتنها اگر برای هر $k \in K$ رابطه $R|_{R^{۲}[k]}$ بازتابی باشد.*

برهان. یک $k\in K$ را در یک قاب کریپکی $\langle K,R\rangle$ که رابطه $R|_{R^{2}[k]}$ بازتابی باشد تثبیت می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم $k\vDash(A_5a)$، نشان می‌دهیم که

$$\forall k'\in R[k]\big(k'\vDash\varphi\to(\psi\to\theta)\Longrightarrow k'\vDash(\varphi\&\psi)\to\theta\big)$$

که معادل است با اینکه برای $k'\in R[k]$ ثابت، با فرض $k'\vDash\varphi\to(\psi\to\theta)$ نشان دهیم که

$$\forall k''\in R[k']\ \big(k''\vDash(\varphi\&\psi)\Longrightarrow k''\vDash\theta\big).$$

بنابراین فرضیات ما عبارتند از:

(۱) رابطه‌ی $R|_{R^{2}[k]}$ بازتابی است،

(۲) $k'\vDash\varphi\to(\psi\to\theta)$،

(۳) $k''\vDash\varphi\&\psi$،

(۴) $kRk'Rk''$.

حکم این است که نشان دهیم $k''\vDash\theta$. به کمک (۳) داریم (۵) $k''\vDash\psi$؛ فرض‌های (۲) و (۴) نتیجه می‌دهند که (۶) $k''\vDash\psi\to\theta$، از بازتابی بودن $R|_{R^{2}[k]}$ و فرض $k''\in R^{2}[k]$ خواهیم داشت $k''Rk''$ و بنابراین از (۵) و (۶) حکم $k''\vDash\theta$ حاصل می‌شود. یک طرف قضیه ثابت شد.

برای عکس قضیه، فرض کنیم برای یک گره $k_0\in K$ در یک قاب کریپکی $\langle K,R\rangle$ رابطه $R|_{R^{2}[k_0]}$ بازتابی نباشد، یعنی $k\in R^{2}[k_0]$ موجود است به طوری که $k\not R k$. حال فرض کنیم برای یک k' داریم $k_0Rk'Rk$. رابطه ارضاء شدن $\vDash$ را برای اتم‌های p,q,r به صورت $(\{k\}\times\{p,q\})$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که نمونه

$$[p\to(q\to r)]\to[(p\&q)\to r]$$

از اصل موضوعه (A_5a) در k_0 ارضاء نمی‌شود. برای اثبات توجه کنید که چون برای $k\in R[k']$ داریم $k\vDash p\&q$ اما $k\nvDash r$، پس $k'\nvDash(p\&q)\to r$. از طرف دیگر برای هر $\ell\in R[k']$ اگر $\ell\vDash p$ آنگاه $\ell=k$ اما از آنجا که هیچ گره‌ای در $R[k]$، q را ارضاء نمی‌کند (توجه داریم که $k\notin R[k]$)،

خواهیم داشت $k \vDash q \to r$، پس $k' \vDash p \to (q \to r)$. بنابراین حکم مورد نظر برقرار خواهد شد یعنی $k_\circ \nvDash [p \to (q \to r)] \to [(p\&q) \to r]$. □

به طور مشابه، یک مشخصه‌سازی دقیق برای مدل‌های کریپکی که اصل موضوعه $(A_\text{۵}b)$ در آنها ارضاء می‌شود وجود دارد که در قضیه زیر ارایه می‌گردد.

قضیه ۶.۲.۴ ($A_\text{۵}b$ و تراگذری و پایایی)**.** *اصل موضوعه* $(A_\text{۵}b)$ *در هر قاب کریپکی* $\langle K, R\rangle$ *که به ازای هر* $k \in K$ *رابطه‌ی* $R|_{R^+[k]}$ *تراگذری و* $\vDash|_{R^{++}[k]}$ *پایای فرمولی نسبت به* R *باشد ارضاء می‌شود. برعکس، اگر* $(A_\text{۵}b)$ *در یک قاب کریپکی* $\langle K, R\rangle$ *ارضاء شود، آنگاه برای هر* $k \in K$ *رابطه* $R|_{R^+[k]}$ *تراگذری است و تحدید رابطه ارضاء شدن به مجموعه* $R^{++}[k]$ *(برای هر* $k \in K$*) روی آن قاب باید نسبت به* R *پایای فرمولی باشد.*

برهان. برای یک مدل کریپکی $\langle K, R, \vDash\rangle$ و یک گره مانند $k \in K$ در آن، اگر رابطه $R|_{R^+[k]}$ تراگذری باشد و $\vDash|_{R^{++}[k]}$ نسبت به R پایای فرمولی باشد آنگاه نشان می‌دهیم که $k \vDash (A_\text{۵}b)$ و این معادل است با این که نشان دهیم

$$\forall k' \in R[k]\big(k' \vDash (\varphi\&\psi) \to \theta \Longrightarrow k' \vDash \varphi \to (\psi \to \theta)\big)$$

یا به طور معادل با فرض $kRk' \vDash (\varphi\&\psi) \to \theta$ داشته باشیم

$$\forall k'' \in R[k']\ \big(k'' \vDash \varphi \Longrightarrow k'' \vDash \psi \to \theta\big)$$

و دوباره به طور معادل نشان دهیم که تحت فرض $k'Rk'' \vDash \varphi$ حکم

$$\forall k''' \in R[k'']\ \big(k''' \vDash \psi \Longrightarrow k''' \vDash \theta\big)$$

برقرار است. لذا فرض‌های ما عبارتند از:

(۱) رابطه $\vDash|_{R^{++}[k]}$ نسبت به R پایای اتمی است،

(۲) تحدید رابطه $R|_{R^+[k]}$ تراگذری است و داریم $kRk'Rk''Rk'''$،

(۳) $k' \vDash (\varphi\&\psi) \to \theta$،

(۴) $k'' \vDash \varphi$،

(۵) $k''' \vDash \psi$.

و حکم این است که نشان دهیم $k''' \vDash \theta$. از (۱) و (۴) و (۵) داریم $k'', k''' \in R^{++}[k]$ و همچنین داریم (۶) $k''' \vDash \varphi\&\psi$. از (۲) داریم $k'Rk'''$ و در نهایت از (۳) و (۶) نتیجه‌ای که می‌خواستیم یعنی $k''' \vDash \theta$ حاصل می‌شود.

برای عکس قضیه، فرض (خلف) می‌کنیم که برای یک گره $k_0 \in K$ در قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$، رابطه تحدید شده $R|_{R^+[k_0]}$ تراگذری نباشد. آنگاه گره‌هایی مانند $k_1, k_2, k_3 \in R^+[k_0]$ وجود دارند به طوری که $k_1Rk_2Rk_3$ اما $k_1 \not R k_3$. همچنین گره‌های $\ell_1, \cdots, \ell_n \in K$ $(n \geqslant 0)$ وجود دارند به گونه‌ای که $k_0R\ell_1R\cdots R\ell_nRk_1$. رابطه ارضاء شدن $\vDash$ را برای اتم‌های p, q, r به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\big(R[k_1] \times \{r\}\big) \cup \{\langle k_2, p\rangle\} \cup \{\langle k_3, q\rangle\} \qquad .$$

حال نشان می‌دهیم که نمونه $[(p\&q) \to r] \to [p \to (q \to r)]$ از اصل موضوعه (A_5b) در ℓ_n ارضاء نمی‌شود. برای اثبات این مطلب توجه می‌کنیم که داریم $k_1 \vDash p\&q \to r$ زیرا برای هیچ گره‌ای مانند $k \in R[k_1]$ گزاره $k \vDash p\&q$ درست نیست. همچنین $k_2 \nvDash q \to r$ زیرا در گره $k_3 \in R[k_2]$ داریم $k_3 \vDash q$ اما $k_3 \nvDash r$ (توجه داریم که $k_3 \notin R[k_1]$)، بنابراین، به این دلیل که در $k_2 \in R[k_1]$ داریم $k_2 \vDash p$ اما $k_2 \nvDash q \to r$، می‌توان نتیجه گرفت که $k_1 \nvDash p \to (q \to r)$.
حال چون داریم $k_1 \vDash p\&q \to r$ و $k_1 \nvDash p \to (q \to r)$ نتیجه مورد انتظار حاصل می‌شود:

$$\ell_n \nvDash [(p\&q) \to r] \to [p \to (q \to r)].$$

در پایان، اگر برای یک گره $k_0 \in K$ در مدل کریپکی $\langle K, R, \vDash\rangle$، رابطه $\vDash|_{R^{++}[k_0]}$ پایای فرمولی نسبت به R نباشد آنگاه گره‌های $k_1, k_2 \in R^{++}[k_0]$ و فرمول φ وجود دارند به طوری که k_1Rk_2، و $k_1 \vDash \varphi$ و $k_2 \nvDash \varphi$. همچنین $\ell_1, \cdots, \ell_n \in K$ $(n \geqslant 1)$ وجود دارند به طوری که $k_0R\ell_1R\cdots R\ell_nRk_1$. نشان می‌دهیم که نمونه $[(\varphi\&\top) \to \varphi] \to [\varphi \to (\top \to \varphi)]$ از اصل موضوعه (A_5b) در این مدل در گره ℓ_{n-1} ارضاء نمی‌شود؛ توجه به این نکته لازم است که اگر $n = 1$ آنگاه $\ell_{n-1} = k_0$. برای اثبات حکم مورد نظر، ابتدا نشان می‌دهیم که برای $\ell_n \in R[\ell_{n-1}]$ داریم $\ell_n \vDash (\varphi\&\top) \to \varphi$ (در واقع برای هر گره k داریم $k \vDash (\varphi\&\top) \to \varphi$). در ضمن،

$\ell_n \nvDash \varphi \to (\top \to \varphi)$ زیرا برای گره $k_1 \in R[\ell_n]$ داریم $k_1 \vDash \varphi$ اما $k_1 \nvDash \top \to \varphi$ و دلیل مطلب اخیر این است که در $k_2 \in R[k_1]$ داریم $k_2 \nvDash \varphi$ (البته به وضوح $k_2 \vDash \top$). □

بد نیست که قبل از ارایه آخرین قضیه، نتایجی که تا اینجای کار به دست آمده را مرور کنیم. از گزاره ۱.۲.۴ نتیجه شد که اصول موضوعه‌ی (A_2)، (A_3)، (A_7) و اصل گودل $\varphi \to \varphi\&\varphi$ در همه قاب‌های کریپکی ارضاء می‌شود. در قضیه ۲.۲.۴ دیدیم که فقط قاب‌های کریپکی بازتابی می‌توانند تنها قاعده منطق پایه یعنی MP را ارضاء کنند. از قضیه ۳.۲.۴ این نتیجه حاصل شد که اصل موضوعه (A_1) می‌تواند در قاب $\langle K, R\rangle$ ارضاء شود، اگر و تنها اگر برای هر $k \in K$ رابطه $R|_{R^+[k]}$ تراگذری باشد. پس، مطابق لم ۱۱.۱.۴ قاب‌های کریپکی مناسب برای منطق‌های فازی باید تراگذری و بازتابی باشند. ضمناً، طبق قضیه ۴.۲.۴ باید رابطه‌های ارضاء شدن روی آن قاب‌های (تراگذری و بازتابی) کریپکی پایا(ی فرمولی) باشند، چون مدل‌های کریپکی روی آن قاب‌ها باید اصل موضوعه (A_4) را ارضاء کنند. قضیه ۵.۲.۴ (برای اصل موضوعه (A_5a)) و قضیه ۶.۲.۴ (برای اصل موضوعه (A_5b)) این مطلب را بار دیگر تصدیق می‌کنند؛ پس تا اینجا مدل‌های کریپکی بایستی بازتابی و تراگذری و پایا باشند.

متأسفانه، یک مشخصه‌سازی خوب برای قاب‌های کریپکی که اصل موضوعه (A_6) را ارضاء می‌کنند، یافت نشده است. یک کاندیدا برای کلاسی از قاب‌های کریپکی که این اصل در آن ارضاء شود، کلاس قاب‌های کریپکی همبند می‌باشد. در واقع، اصل موضوعه (A_6) در هر مدل کریپکی (پایای فرمولی) همبند ارضاء می‌شود (قضیه بعد را ببینید). اما عکس این مطلب برقرار نیست: مدل کریپکی $\langle\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \subseteq, \emptyset\rangle$ (با رابطه ارضاء شدن تهی) بازتابی، تراگذری و پایا است اما همبند نیست (با فرض $a \neq b$)؛ این مدل اصل موضوعه (A_6) و هر گزاره همیشه درست کلاسیک را ارضاء می‌کند. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که اگر یک قاب کریپکی بازتابی و تراگذری که نسبت به رابطه ارضاء شدن پایا می‌باشد و اصل موضوعه (A_6) را ارضاء کند، باید همبند باشد. قبل از اثبات آخرین قضیه، اندکی درباره اصل موضوعه خطی یعنی اصل $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ صحبت می‌کنیم. این اصل به علاوه منطق شهودی (گزاره‌ای)، قاب‌های کریپکی را اصل‌بندی می‌کند که رابطه دسترسی

آن‌ها مرتب خطی است. منطقی که از اضافه کردن این اصل به منطق شهودی به دست می‌آید منطق دامت[۳] نامیده می‌شود.

لم ۷.۲.۴ (اصل خطی). *فرمول* $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ *در همه مدل‌های کریپکی پایا(ی فرمولی) و همبند ارضاء می‌شود.*

برهان. فرمول‌های φ و ψ را درنظر بگیرید. اگر $k \nvDash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ آنگاه گره‌های $k', k'' \in R[k]$ موجودند به طوری که $k' \vDash \varphi$ اما $k' \nvDash \psi$، و $k'' \vDash \psi$ اما $k'' \nvDash \varphi$. از خاصیت همبند بودن (و $k', k'' \in R^{+}[k]$) داریم $k'Rk''$ یا $k''Rk'$. حال، اگر $k'Rk''$ آنگاه از پایایی (فرمولی) و $k' \vDash \varphi$ خواهیم داشت $k'' \vDash \varphi$ و این تناقض است (چون $k'' \nvDash \varphi$). به طور مشابه، از حالت $k''Rk'$ هم به تناقض می‌رسیم. $\square$

قضیه ۸.۲.۴ ($A_{۴}$ و همبند بودن به همراه بازتابی، تراگذری و پایایی). *اصل موضوعه* $(A_{۴})$ *در هر مدل کریپکی همبند و پایا ارضاء می‌شود. همچنین، اگر یک قاب کریپکی تراگذری و بازتابی با رابطه ارضاء شدن پایا، اصل موضوعه* $(A_{۴})$ *را ارضاء کند آنگاه باید همبند باشد.*

برهان. فرض کنید مدل کریپکی $\langle K, R, \vDash \rangle$ همبند و پایا باشد. برای گره $k \in K$ و فرمول‌های φ، ψ و θ نشان می‌دهیم که

$$k \vDash [(\varphi \to \psi) \to \theta] \to [([\psi \to \varphi] \to \theta) \to \theta]$$

و این معادل است با این که نشان دهیم

$$\forall k' \in R[k] \big(k' \vDash (\varphi \to \psi) \to \theta \Longrightarrow k' \vDash ([\psi \to \varphi] \to \theta) \to \theta\big).$$

پس یک گره $k' \in R[k]$ را تثبیت می‌کنیم به طوری که $k' \vDash (\varphi \to \psi) \to \theta$؛ نشان می‌دهیم

$$\forall k'' \in R[k'] \left(k'' \vDash [(\psi \to \varphi) \to \theta] \Longrightarrow k'' \vDash \theta\right).$$

بنابراین، فرض‌های ما عبارتند از:

(۱) R همبند است و $kRk'Rk''$،

[۳] Dummett

(۲) $\vDash$ نسبت به R پایای فرمولی است،

(۳) $k' \vDash (\varphi \to \psi) \to \theta$،

(۴) $k'' \vDash (\psi \to \varphi) \to \theta$.

نشان می‌دهیم که $k'' \vDash \theta$. طبق لم ۷.۲.۴ باید لااقل یکی از حالت‌های (i) $k'' \vDash \varphi \to \psi$ یا (ii) $k'' \vDash \psi \to \varphi$ برقرار باشند. در حالت (i) از فرض‌های (۱) و (۳) خواهیم داشت $k'' \vDash \theta$. در حالت (ii) توجه کنید که از (۱) (و از همبند بودن R که بازتابی بودن $R|_{R+[k]}$ را نتیجه می‌دهد) داریم $k''Rk''$، و از (۴) می‌توان نتیجه گرفت که $k'' \vDash \theta$.

حال (برای رسیدن به تناقض)، فرض کنیم که قاب کریپکی $\langle K, R\rangle$ بازتابی و تراگذری است اما همبند نیست. پس باید گره‌های $k, k', k'' \in K$ موجود باشند به طوری که kRk'، kRk''، $k'\not{R}k''$ و $k''\not{R}k'$. توجه داریم که $k \notin R[k'] \cup R[k'']$ و $k' \notin R[k'']$ و همچنین $k'' \notin R[k']$. برای اتم‌های p, q, r رابطه ارضاء شدن $\vDash$ روی این قاب را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$(R[k'] \times \{p\}) \cup (R[k''] \times \{q\}) \cup ([R[k] \cap \{\ell \in K \mid \ell \not{R} k\}] \times \{r\}).$$

از تراگذری بودن R می‌توان گفت که رابطه ارضاء شدن پایای اتمی است (چون به عنوان مثال اگر $\ell \vDash r$ و $\ell R \ell'$ آنگاه از $kR\ell$ و $\ell \not{R} k$ و از تراگذری بودن R، داریم $kR\ell'$ و همچنین $\ell' \not{R} k$، چون اگر $\ell' Rk$ آنگاه از $\ell R \ell'$ و تراگذری بودن R خواهیم داشت ℓRk که تناقض است)؛ پس رابطه $\vDash$ پایای فرمولی است (از تراگذری بودن R و گزاره ۱۰.۱.۴). نشان می‌دهیم که تحت این رابطه ارضاء شدن، نمونه زیر از اصل موضوعه $(A_۶)$ در k ارضاء نمی‌شود:

$$[(p \to q) \to r] \to [([q \to p] \to r) \to r].$$

اولاً، توجه کنید که چون در $k' \in R[k]$ داریم $k' \vDash p$ و $k' \nvDash q$ لذا $k \nvDash p \to q$ و ثانیاً، داریم $k \vDash (p \to q) \to r$ و $k \vDash (q \to p) \to r$ (چون برای هر $\ell \in R[k]$، اگر $\ell \vDash p \to q$ یا $\ell \vDash q \to p$ آنگاه با پایایی، $\ell \not{R} k$ و بنابراین $\ell \vDash r$). در نهایت، چون $k \vDash [q \to p] \to r$ اما $k \nvDash r$، خواهیم داشت $k \nvDash ([q \to p] \to r) \to r$. □

نتیجه ۹.۲.۴ (مدل‌های کریپکی برای منطق فازی پایه). *یک مدل کریپکی، اصول موضوعه منطق فازی پایه (و تنها قاعده آن) را ارضاء می‌کند اگر وتنها اگر، بازتابی، تراگذری و همبند باشد و رابطه ارضاء شدن نسبت به رابطه دسترسی پایای فرمولی باشد.*

۳.۴ جمع‌بندی

در نظریه‌ی مدل‌های کریپکی نتیجه‌ای منفی حاصل شد، زیرا ثابت شد که هیچ کلاسی از قاب‌های کریپکی نمی‌تواند به طور دقیق منطق فازی پایه یا منطق‌های فازی که شامل منطق گودل نیستند را اصل‌بندی کند. اما در این بخش جنبه‌های مثبت را مطرح می‌کنیم.
منطق فازی گودل از افزودن منطق BL به علاوه اصل خودتوانی یعنی $\varphi \to (\varphi \& \varphi)$ اصل‌بندی می‌شود [۱]. دامت نشان داد که این منطق می‌تواند کاملاً توسط منطق شهودی به علاوه اصل خطی یعنی $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$ اصل‌بندی شود [۳]. به علاوه، منطق گودل-دامت صحیح و قویاً کامل نسبت به مدل‌های کریپکی مرتبط، تراگذری و انعکاسی است.
نتیجه ۹.۲.۴ نشان داد که تنها کلاسی از مدل‌های کریپکی که می‌تواند برای یک منطق شامل BL درست و (قویاً) کامل باشد، باید شامل کلاس مدل‌های کریپکی پایا، مرتبط، تراگذری و بازتابی باشد. به عبارتی، هر منطق که شامل BL است و یک کلاس از مدل‌ها/قاب‌های کریپکی را اصل‌بندی می‌کند باید شامل منطق گودل-دامت باشد (گزاره ۱.۲.۴). پس، یک مشخصه‌سازی نظریه-مدل-کریپکی[۴] از منطق فازی گودل، کوچکترین منطق فازی شامل منطق فازی پایه است که نسبت به کلاسی از مدل‌ها/قاب‌های کریپکی، صحیح و کامل است. همچنین، کلاس مدل‌های کریپکی پایا و مرتبط و تراگذری و بازتابی، کوچکترین کلاسی است که می‌تواند توسط یک منطق فازی گزاره‌ای اصل‌بندی شود.

[۴] Kripke-Model-Theoretic characterization

فصل ۵

ادامه مسیر پژوهش و مسایل باز

(۱) دیدیم که برای داشتن مدل‌های کریپکی که منطق فازی در آن تمام و صحیح باشد، وجود یک رابطه کافی نیست. آیا با دو یا چند رابطه می‌توان به مقصود رسید؟

(۲) آیا رابطه‌ای بین مدل‌های کریپکی و فلسفه منطق‌های فازی وجود دارد؟

(۳) اگر تعریف عطف تغییر کند، آیا مدل‌های/قاب‌های کریپکی تغییری می‌کنند؟ چه تغییری؟ اگر تعریف استلزام تغییر کند چه؟

(۴) در مقاله [۸] فرمول‌هایی برای شرایط روی رابطه‌های دسترسی قاب‌های کریپکی ارایه شده‌اند، که یک قاب کریپکی آن فرمول را ارضاء می‌کند اگر و تنها اگر رابطه‌ی دسترسی آن قاب در آن شرایط صدق کند. آیا می‌توان برای پایایی رابطه ارضاء یک مدل کریپکی فرمول(ها) یا قاعده(ها)یی پیدا کرد به طوری که یک مدل کریپکی آن فرمول(ها) یا قاعده(ها) را ارضاء کند اگر و تنها اگر رابطه‌ی ارضاء کردن آن نسبت به رابطه دسترسی پایا(ی فرمولی) باشد؟

(۵) برای منطق‌های فازی دیگر چگونه تابع عطف و رابطه استلزام را تعریف کنیم که مدل کریپکی مناسب این منطق‌ها حاصل شود؟

مراجع

[1] K. Bendova, A Note on Gödel Fuzzy Logic, *Soft Computing* 2 (1999) 167.

[2] S. Celani, R. Jansana, A Closer Look at Some Subintuitionistic Logics, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 42 (2001) 225–255.

[3] M. Dummet, A Propositional Calculus with Denumerable Matrix, *The Journal of Symbolic Logic* 24 (1959) 97–106.

[4] K. Gödel, Zum Intuitionistichen Aussagenkalkül, *Anzeiger der Akademie der Wissenschaftischen in Wien* 69 (1932) 65–66.

[5] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic* (Springer 1998).

[6] J. Micheal Dunn, G. Epstein, *Modern Uses of Multiple Valued Logic* (Springer 1977).

[7] G. Mints, *A Short Introduction to Intuitionistic Logic* (Springer 2002).

[8] V.Švejdar, K. Bendova, On Inter-expressibility of Logical Connectives in Gödel Fuzzy Logic, *Soft computing* 4 (2000) 103–105.

[9] A. Visser, A Propositional Logic with Explicit Fixed Points, *Studia Logica* 40 (1981) 155–175.

[۱۰] ا. اسلامی، *منطق‌های فازی و کاربردهای آن* (انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان ۱۳۹۱).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ارضاء	Satisfaction
استلزام	Implication
اصل موضوعه	Axiom
اصل‌بندی کردن	Axiomatize
بازتابی	Reflexive
بستار متعدی	Transitive Closure
بیان شدنی	Expressible
پایایی	Persistency
پایای اتمی	Atom Persistent
پایای فرمولی	Formula Persistent
تراگذری (متعدی)	Transitive
تحدید	Restriction
تمامیت	Compleneness
تعریف پذیری	Definability
توسیع	Extention
جبر هیتینگ	Heyting Algebra
خطی	Linear
درستی	Truth

رابط .... Connective
رابطه‌ی دسترسی .... Accessability Relation
رابطه‌ی دودویی .... Binary Relation
صحت .... Soundness
طرح .... Schema
عطف .... Conjunction
عمومیت .... Universality
قاب کریپکی .... Kripke Frame
قاعده .... Rule
قویاً کامل .... Strongly Complete
گراف جهت‌دار .... Directed Graph
گره .... Node
گزاره‌ای .... Propositional
مدل کریپکی .... Kripke Model
منطق ابرشهودی .... Super-Intuitionistic Logic
منطق دامت .... Dummett Logic
منطق زیرشهودی .... Subintuitionistic Logic
منطق شهودی .... Intuitionistic Logic
منطق فازی .... Fuzzy Logics
منطق فازی پایه .... The Basic Fuzzy Logic
منطق گودل .... Gödel Logic
نادرست .... Falsity
نمونه .... Instance
وضع مقدم .... Moduse Ponens
همبند .... Connected

واژه نامه انگلیسی به فارسی

رابطه‌ی دسترسی .... Accessability Relation
پایای اتمی .... Atom Persistent
اصل موضوعه .... Axiom
اصل‌بندی کردن .... Axiomatize
رابطه دوتایی .... Binary Relation
تمامیت .... Completeness
همبند .... Connected
عطف .... Conjunction
رابط .... Connective
گراف جهت‌دار .... Directed Graph
منطق دامت .... Dummet Logic
بیان شدنی .... Expressible
توسیع .... Extention
نادرست .... Falsity
پایای فرمولی .... Formula Persistent
منطق‌های فازی .... Fuzzy Logics
منطق گودل .... Gödel Logic
جبر هیتینگ .... Heyting Algebra

Implication .... استلزام
Instance .... مورد
Intuitionistic Logic .... منطق شهودی
Kripke Frame .... قاب کریپکی
Kripke Model .... مدل کریپکی
Moduse Ponens .... وضع مقدم
Linear .... خطی
Node .... گره
Persistency .... پایایی
Propositional .... گزاره‌ای
Reflexive .... بازتابی
Restriction .... تحدید
Rule .... قاعده
Satisfaction .... ارضاء
Schema .... طرح
Semantics .... معناشناسی
Strongly Complete .... قویاً کامل
Soundness .... صحت
Super-Intuitionistic Logic .... منطق ابر شهودی
Sub-intuitionistic .... منطق زیرشهودی
The Basic Fuzzy Logic .... منطق فازی پایه
Transitive .... تراگذری
Transitive Closure .... بستار متعددی
Truth .... درستی
Universality .... عمومیت

Surname: Safari **Name:** Parvin

Title: Investigating Kripke Semantics for Fuzzy Logics

Supervisor: Saeed Salehi

Advisor: Jafar Sadegh Eivazloo

Degree: Ph.D **Subject:** Pure Mathematics

Field: Mathematical Logic **University of Tabriz**

Faculty of Mathematical Sciences **Date:**2017 **Number of Pages:** 59

Keywords: Fuzzy Logics, The Basic Fuzzy Logics, Gödel Logic , Dummet Logic, Kripke Frames, Soundness, Completeness, Semantics.

Abstract

Kripke frames (and models) provide a suitable semantics for sub-classical logics; for example Intuitionistic Logic (of Brouwer and Heyting) axiomatizes the reflexive and transitive Kripke frames (with persistent satisfaction relations), and the Basic Logic (of Visser) axiomatizes transitive Kripke frames (with persistent satisfaction relations). Here, we investigate whether Kripke frames/models could provide a semantics for fuzzy logics. For each axiom of the Basic Fuzzy Logic, necessary and sufficient conditions are sought for Kripke frames/models are the extensions of the Gödel Logic (or the super-intuitionastic logic of Dummett); indeed this logic is sound and strongly complete with respect to reflexive, transitive and linear (connected) Kripke frames (with persistent satisfaction relations). This provides a semantic characterization for the Gödel Logic among (propositional) fuzzy logics.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DOCTORAL THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS, MATHEMATICAL LOGIC

Investigating Kripke Semantics for Fuzzy Logics

Supervisor

Saeed Salehi

Advisor

Jafar Sadegh Eivazloo

by

Parvin Safari

2017